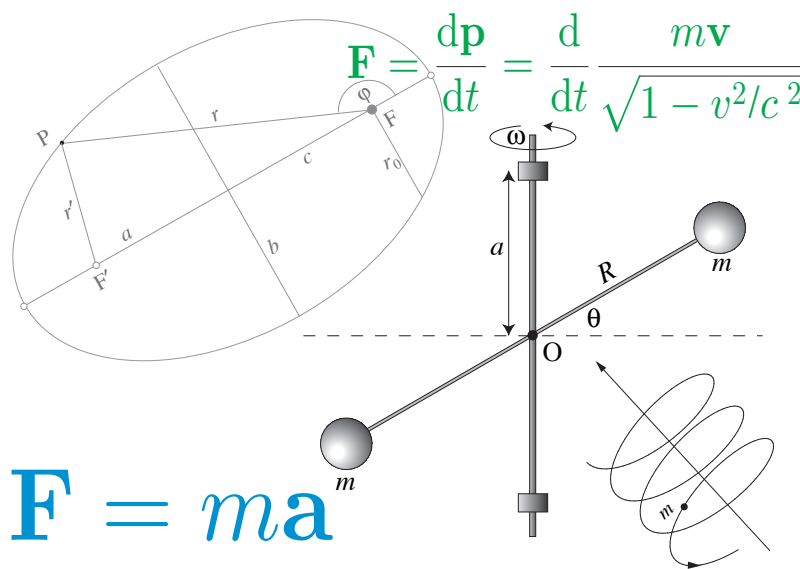


# MÉCANIQUE I

*par*

David SÉNÉCHAL

*Ph.D., Professeur Titulaire*



$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

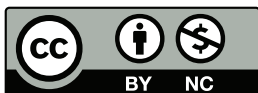
Faculté des sciences

Département de physique

(mars 2020)

**Ce manuel électronique** fut utilisé dans le cadre du cours PHQ110 (Mécanique I) à l'Université de Sherbrooke, à partir de 1994. Il fait partie d'une collection de manuels électroniques diffusés par des professeurs du département de physique de l'Université de Sherbrooke. Il a été revisité pour une diffusion sous licence libre en collaboration avec la fabriqueREL en mars 2020. Il est diffusé sous licence *Creative Commons* dans sa version BY-NC, sauf indications contraires.

**L'auteur**, David Sénéchal, est professeur titulaire à l'Université de Sherbrooke. Son domaine de recherche est la modélisation numérique des matériaux quantiques. C'est dans un esprit de partage et de collaboration qu'il a décidé de partager cette ressource éducative libre. La liste de ses publications est disponible sur [Google Scholar](#).



Sauf indications contraires, le contenu de ce manuel électronique est disponible en vertu des termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'utilisation commerciale 4.0 International](#).

**Vous êtes encouragé à :**

- Partager** – copier, distribuer et communiquer le matériel par tous moyens et sous tous formats.
- Adapter** – remixer, transformer et créer à partir du matériel.

**Selon les conditions suivantes :**

- Paternité** – Vous devez citer le nom de l'auteur original.
- Pas d'utilisation commerciale** – Vous n'avez pas le droit d'utiliser le matériel à des fins commerciales.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Introduction historique</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Mouvement d'un point</b>	<b>9</b>
A	Mouvement en une dimension . . . . .	9
B	Mouvement en trois dimensions . . . . .	11
1	Vecteurs . . . . .	11
2	Dérivées d'un vecteur : vitesse et accélération . . . . .	13
C	Rotations. . . . .	18
D	Référentiels . . . . .	20
1	Changement d'origine . . . . .	20
2	Changement de référentiel . . . . .	21
3	Transformation de la vitesse et de l'accélération . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Les lois du mouvement</b>	<b>29</b>
A	Les lois du mouvement de Newton . . . . .	29
1	Les <i>Principia</i> de Newton . . . . .	29
2	Première loi . . . . .	30
3	Deuxième loi . . . . .	31
4	Troisième loi . . . . .	32
B	Systèmes de particules et centre de masse . . . . .	33
C	Gravitation universelle . . . . .	35
1	Loi de la gravitation universelle . . . . .	35
2	Champ gravitationnel . . . . .	36
3	Forces fondamentales et forces macroscopiques . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Applications élémentaires des lois du mouvement</b>	<b>43</b>
A	Déterminisme classique . . . . .	43
1	Équations du mouvement. . . . .	43
2	Solution numérique des équations du mouvement . . . . .	44
B	Forces élastiques ou de cohésion . . . . .	45
1	Loi de Hooke . . . . .	45
2	Force de contrainte . . . . .	46
3	Force d'étirement ou tension . . . . .	46
4	Pendule simple . . . . .	47
C	Pression et principe d'Archimède . . . . .	50
1	Variation de la pression en fonction de la hauteur . . . . .	51
2	Principe d'Archimède . . . . .	52
D	Frottement et viscosité . . . . .	53
1	Coefficients de friction . . . . .	53
2	Force de viscosité . . . . .	54
E	Mouvement dans un champ magnétique . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Énergie et Travail</b>	<b>71</b>
A	Conservation de l'énergie en une dimension . . . . .	71
B	Conservation de l'énergie en trois dimensions . . . . .	73
1	Forces conservatives . . . . .	73

2	Forces centrales . . . . .	74
C	Potentiel gravitationnel . . . . .	75
1	Potentiel gravitationnel d'un objet sphérique . . . . .	76
2	Force exercée sur un objet sphérique . . . . .	78
3	Potentiel gravitationnel à la surface de la Terre . . . . .	78
4	Énergie potentielle gravitationnelle et centre de masse . . . . .	78
D	Énergie potentielle et stabilité . . . . .	79
E	Travail . . . . .	81
1	Théorème travail-énergie . . . . .	82
2	Travail et forces non conservatives . . . . .	82
3	Travail et chemin parcouru . . . . .	83
4	Principe de Bernoulli . . . . .	83
F	Énergie de plusieurs objets en interaction . . . . .	85
1	Théorème travail-énergie dans le cas d'un système de particules . . . . .	86
G	Conservation de l'énergie et formes d'énergie . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Conservation de la quantité de mouvement</b>	<b>97</b>
A	Collisions élastiques . . . . .	97
1	Collision en une dimension . . . . .	98
2	Collision en deux dimensions : angle de diffusion . . . . .	99
3	Cas de masses égales . . . . .	102
B	Théorème de König et collisions inélastiques . . . . .	103
1	Premier théorème de König . . . . .	104
2	Variation de l'énergie interne . . . . .	104
C	Objets à masse variable . . . . .	106
D	Invariance par translation et conservation de la quantité de mouvement* . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Mouvement dans un champ de force central</b>	<b>115</b>
A	Moment cinétique et loi des aires . . . . .	115
1	Moment d'un vecteur . . . . .	115
2	Conservation du moment cinétique . . . . .	116
3	Loi des aires . . . . .	117
B	Potentiel central et orbites . . . . .	119
C	Problème de Kepler . . . . .	121
1	Propriétés des coniques . . . . .	123
2	Correspondance avec les coordonnées cartésiennes . . . . .	126
D	Orbites elliptiques . . . . .	127
1	Troisième loi de Kepler . . . . .	127
2	Énergie, moment cinétique et vitesses . . . . .	127
3	Équation de Kepler . . . . .	128
4	Éléments d'une orbite . . . . .	128
E	Le problème à deux corps . . . . .	130
<b>8</b>	<b>Moment cinétique et rotation des corps</b>	<b>139</b>
A	Moment cinétique et centre de masse . . . . .	139
1	Absence de couple interne . . . . .	139
2	Second théorème de König . . . . .	140
3	Couple dans un champ gravitationnel uniforme . . . . .	142
4	Conservation du moment cinétique . . . . .	142
B	Invariance par rotation et conservation du moment cinétique* . . . . .	143
C	Équilibre statique . . . . .	144
D	Vitesse angulaire . . . . .	145

E	Rotation autour d'un axe fixe . . . . .	146
1	Théorème de Huygens . . . . .	148
F	Énergie cinétique de rotation . . . . .	150
1	Relation entre couple et énergie potentielle. . . . .	151
G	Mouvement de précession. . . . .	153
1	Précession des équinoxes . . . . .	155
2	Précession des spins nucléaires . . . . .	156
3	Résonance magnétique . . . . .	156
H	Mouvement libre d'un objet rigide* . . . . .	157
1	Matrice d'inertie . . . . .	157
2	Axes fixes à l'objet . . . . .	158
3	Énergie de rotation . . . . .	158
<b>9</b>	<b>Référentiels accélérés</b>	<b>171</b>
A	Forces d'inertie . . . . .	171
1	Principe d'équivalence . . . . .	172
B	Référentiel tournant . . . . .	173
1	Force centrifuge . . . . .	174
2	Force de Coriolis . . . . .	175
3	Force de Coriolis et systèmes climatiques . . . . .	176
4	Marées . . . . .	178
5	Pendule de Foucault . . . . .	180
C	Mouvement libre d'un rigide : équations d'Euler* . . . . .	181
D	La toupie symétrique : angles d'Euler* . . . . .	184
1	Angles d'Euler . . . . .	184
2	Précession uniforme . . . . .	185
3	Nutation. . . . .	186
4	Toupie dormante. . . . .	187
5	Diagramme énergétique et potentiel effectif . . . . .	187
<b>10</b>	<b>Relativité restreinte</b>	<b>195</b>
A	Principe de relativité. . . . .	195
1	Transformation de Galilée . . . . .	195
B	Invariance de la vitesse de la lumière . . . . .	196
1	Mesures de la vitesse de la lumière. . . . .	196
2	Expérience de Michelson et Morley . . . . .	198
C	Transformation de Lorentz . . . . .	199
1	Espace-temps et intervalle . . . . .	202
2	Intervalle . . . . .	203
3	Contraction des longueurs . . . . .	204
4	Dilatation du temps . . . . .	205
5	Transformation des vitesses . . . . .	207
D	Effet Doppler . . . . .	208
1	Effet Doppler non relativiste : source en mouvement . . . . .	208
2	Effet Doppler non relativiste : observateur en mouvement . . . . .	209
3	Effet Doppler relativiste . . . . .	209
4	Effet Doppler gravitationnel . . . . .	210
E	Quadrivecteurs . . . . .	211
1	Invariants . . . . .	212
2	Temps propre . . . . .	212
3	Quadri vitesse . . . . .	213
F	Quantité de mouvement et énergie. . . . .	214
1	Quadrivecteur impulsion . . . . .	215

## TABLE DES MATIÈRES

2	Travail et énergie . . . . .	216
3	Force et accélération . . . . .	216
4	Particules de masse nulle et effet Doppler . . . . .	217
5	Collisions relativistes et équivalence masse-énergie . . . . .	218
G	Problèmes . . . . .	221
<b>11</b>	<b>Annexes</b>	<b>227</b>
A	Produit vectoriel et produit triple . . . . .	227
1	Produit vectoriel . . . . .	227
2	Produit triple . . . . .	228
B	Coordonnées curvilignes et repères locaux . . . . .	232
1	Coordonnées cylindriques . . . . .	232
2	Coordonnées sphériques . . . . .	234
C	Notion de gradient . . . . .	235
D	Constantes physiques et astronomiques . . . . .	237
E	L'alphabet grec . . . . .	238

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION HISTORIQUE

La mécanique est la science du mouvement et de ses causes. Elle est considérée à juste titre comme la base de l'apprentissage de la physique. Déjà chez les Grecs de l'antiquité des philosophes avaient formulé des théories sur le mouvement. La pensée de la fin de l'Antiquité et du Moyen âge était dominée par l'oeuvre d'*Aristote* (–384/ – 322), qui couvre tous les domaines d'étude de la nature, de la logique à la zoologie. Une part importante de l'oeuvre d'Aristote porte sur le mouvement. Mais Aristote traite du mouvement comme il traite de la zoologie : par une observation soignée des phénomènes, avec un certain sens de la classification et, surtout, de manière essentiellement *qualitative*. Il distingue trois types de mouvement : le mouvement *naturel*, le mouvement *violent* et le mouvement *volontaire*.

Le mouvement naturel se produit lorsqu'un objet tend à rejoindre sa place naturelle dans l'ordre des choses. Les anciens distinguaient généralement quatre éléments : la *terre*, l'*eau*, l'*air* et le *feu*. À chaque élément on associait une sphère et les sphères des quatre éléments étaient imbriquées les unes dans les autres dans l'ordre ci-haut, la terre étant la plus intérieure. Au-delà de la sphère du feu s'étendaient les sphères célestes, associées aux différents astres. Ainsi, l'explication qu'Aristote donne à la chute d'une pierre est que celle-ci tend naturellement à rejoindre la sphère de l'élément *terre*. La même explication vaut pour l'élévation dans les airs d'une flamme et l'écoulement de l'eau. D'autre part, Aristote affirme qu'une pierre B, deux fois plus lourde qu'une autre pierre A, met deux fois moins de temps que A à tomber si on les relâche simultanément d'une certaine hauteur.

Par contre, le mouvement violent est essentiellement artificiel et temporaire. Une charrette qu'on tire subit un mouvement violent. L'état naturel des objets terrestres étant le repos, une force est nécessaire pour qu'un objet puisse se déplacer, même à vitesse constante. On a réalisé assez tôt que ce type d'argument explique assez mal le mouvement d'une flèche qu'un archer décoche : quelle est donc la force qui fait avancer la flèche dans son vol, alors qu'elle a perdu contact avec la corde de l'arc ? Les aristotéliens soutiennent que l'air fendu par la flèche effectue un retour par derrière et pousse constamment la flèche vers l'avant, jusqu'à ce qu'elle s'arrête et tombe par mouvement naturel. Certains penseurs médiévaux ont fortement critiqué cette explication, en ajoutant que la flèche recevait une certaine qualité appelée *impetus* (élan, en français) lors de son lancement et qu'elle épuisait progressivement cet *impetus*. La notion d'*impetus* est proche de notre notion de quantité de mouvement, mais il lui manque une définition précise, quantitative.

Quant au mouvement volontaire, il est le fruit de la volonté des êtres animés : un animal qui se déplace, essentiellement. On voit à quel point la classification aristotélicienne du mouvement est superficielle et peu féconde en explications véritables.

Enfin, soulignons que les anciens, suivant Aristote, traçaient une démarcation claire entre la physique terrestre et la physique céleste : le mouvement naturel des astres était circulaire et uniforme, même si plusieurs cercles étaient nécessaires pour décrire le mouvement d'un astre donné. Les objets célestes étaient réputés incorruptibles et éternels, alors que les objets terrestres (plus précisément, ceux du monde dit *sublunaire*) étaient susceptibles de corruption, de changements.

Résumons ainsi les principales caractéristiques de la physique aristotélicienne :

- La mouvement est décrit de manière entièrement qualitative, sans faire usage des mathématiques.

- Ainsi, le mouvement est régi par des principes vagues et non par des lois physiques précises.
- Le monde sublunaire et le monde céleste sont de natures très différentes.
  - On distingue le mouvement naturel du mouvement violent. Ce dernier nécessite l'exercice d'une force, sinon l'objet retourne à sa sphère d'influence et y demeure ensuite au repos.

Galilée a été le premier à contester avec succès la physique d'Aristote, notamment à l'aide d'expériences et d'observations, mais aussi en proposant que «le livre de la nature est écrit en langage mathématique» et donc que les principes du mouvement doivent être énoncés mathématiquement. Galilée a le premier décrit correctement le mouvement uniformément accéléré et la composition du mouvement, en particulier d'un mouvement parabolique. Cependant, Galilée ne s'est pas affranchi de l'idée que le mouvement des astres était naturellement circulaire, c'est-à-dire qu'il n'a pas ressenti le besoin d'une force centripète pour qu'une planète tourne autour du Soleil. En fait, il considérait le mouvement linéaire comme la limite d'un mouvement circulaire de rayon infini.

Le XVII<sup>e</sup> siècle a vu l'éclosion de la science moderne, dont la mécanique, l'astronomie et le calcul infinitésimal formaient l'avant-garde. Descartes, malgré ses nombreuses erreurs dans le domaine de la physique, stimulera beaucoup la réflexion autour du mouvement. Huygens après lui énoncera correctement les lois des chocs (collisions). Il faudra cependant attendre Isaac Newton (1643/1727) pour qu'une mécanique précise et universelle prenne forme. La mécanique classique repose sur ce qu'on appelle traditionnellement les *trois lois de Newton*, énoncées dans l'œuvre principale de ce dernier, *Les Principes mathématiques de la philosophie naturelle* (en latin *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*), parue en 1687. La mécanique classique telle qu'elle sera exposée dans ce cours repose essentiellement sur les idées de Newton (on la surnomme *mécanique newtonienne*) pour cette raison. Cette mécanique repose sur un modèle – appelons-le le modèle newtonien – dans lequel tout système physique peut être conçu comme un ensemble de points matériels (on peut penser aux atomes, quoique ce ne soit pas nécessaire) qui exercent les uns sur les autres des forces. Notre compréhension du monde provient nécessairement de la connaissance de ces forces et de leur effet, déterminé par les lois du mouvement de Newton.

Ce qui différencie notre enseignement actuel de la mécanique newtonienne de ce que Newton et ses successeurs immédiats pratiquaient, c'est d'une part la notation mathématique différente (beaucoup plus algébrique, et moins géométrique, qu'à l'époque de Newton) et d'autre part l'introduction de notions inconnues de Newton comme la conservation de l'énergie ou le moment cinétique. Ceci dit, la mécanique n'est pas restée figée depuis Newton, et sa formulation a beaucoup évolué jusqu'au XX<sup>e</sup> siècle. Ce sont les mathématiciens et les astronomes qui ont le plus contribué à cette évolution. Une œuvre marquante dans cette évolution fut la *mécanique analytique* de Lagrange (1788, un siècle après Newton). Lagrange propose une formulation de la mécanique qui permet d'obtenir assez rapidement les équations différentielles qui déterminent le mouvement d'un système mécanique quelconque. Plus tard, l'Irlandais William Rowan Hamilton inventera des méthodes encore plus puissantes (1833) qui forment une extension de la mécanique de Lagrange appelée mécanique hamiltonienne. Ces deux formulations de la mécanique constituent un outil plus puissant que la mécanique newtonienne et sont à la base de la mécanique quantique. Cependant, nous devons commencer par le commencement...



## CHAPITRE 2

# MOUVEMENT D'UN POINT

La notion de mouvement est indissociable de la notion de *temps*. Il est bien sûr impossible de définir de manière satisfaisante ce qu'est le temps, pas plus que l'espace d'ailleurs. Newton considérait le temps et l'espace comme un cadre absolu, dans lequel se déroulent les événements de ce monde et le mouvement des objets en particulier. Ainsi, il considérait le temps comme un écoulement invariable et uniforme, le même pour tous les observateurs. Le philosophe allemand Emmanuel KANT, auteur d'un célèbre traité sur la connaissance (*Critique de la raison pure*, 1781), voyait le temps et l'espace comme des *a priori*, c'est-à-dire précédant les capacités de raisonner des humains. En fait, il semble impossible de définir en pratique ce qu'est le temps sans faire référence au mouvement, car tous les instruments de mesure du temps sont basés sur une forme ou une autre de mouvement. Dans ce qui suit, nous nous contentons de considérer le temps comme une variable continue (notée  $t$ ) en fonction de laquelle le mouvement d'un point peut être exprimé.

### A

#### Mouvement en une dimension

Commençons par étudier le mouvement d'un point en une dimension d'espace. Dans ce cas, la position d'une particule est spécifiée par une seule coordonnée  $x$ , et le mouvement de la particule par une fonction du temps  $x(t)$ .

La vitesse moyenne d'une particule entre les temps  $t_1$  et  $t_2$  est

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.1)$$

La *vitesse instantanée* (ou simplement *vitesse*) de la particule est la limite de la vitesse moyenne quand l'intervalle  $\Delta t$  tend vers zéro, soit la dérivée

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \quad (2.2)$$

La notation  $\dot{x}$  pour la dérivée, utilisée par Newton, l'est encore dans ce contexte, pour désigner une dérivée par rapport au temps. L'*accélération*, de même, est la dérivée par rapport au temps de la vitesse :

$$a(t) \equiv \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2.3)$$

Le concept de vitesse instantanée est à l'origine de la notion de dérivée et forme la base du calcul différentiel et intégral.

À l'inverse, étant donnée une vitesse  $v(t)$  connue en fonction du temps, ainsi qu'une position initiale  $x_0$  au temps  $t = 0$ , on retrouve la position en fonction du temps par une intégrale. Plus précisément, le déplacement

de la particule entre les temps  $t$  et  $t + \varepsilon$  est donné par  $\Delta x = v(t)\varepsilon$  au premier ordre en  $\varepsilon$  et le déplacement sur un intervalle de temps fini  $[0, t]$  est exactement donné par l'intégrale

$$\Delta x = \int_0^t v(t') dt' \quad \text{de sorte que} \quad x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') dt' \quad (2.4)$$

De même, étant donnée une accélération  $a(t)$  connue en fonction du temps, ainsi qu'une vitesse initiale  $v_0$ , on retrouve la vitesse  $v(t)$  par une intégrale. On retrouve ensuite la position  $x(t)$  par une deuxième intégrale, étant donnée la position initiale  $x_0$ .

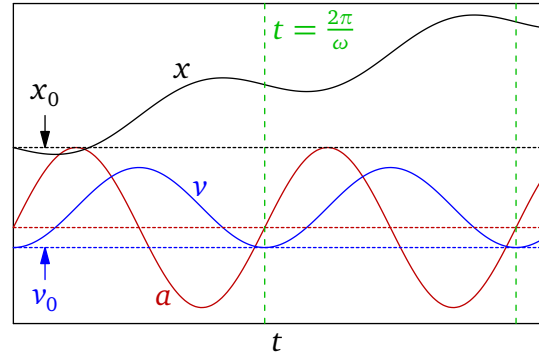


FIGURE 2.1

Mouvement harmonique en une dimension (exemple 2.2)

### Exemple 2.1

Considérons une particule en accélération constante  $a$ , avec une vitesse initiale  $v_0$  et une position initiale  $x_0$ . Trouvons une expression pour la vitesse et la position en fonction du temps. La vitesse instantanée est donnée par

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a dt' = v_0 + at \quad (2.5)$$

et la position par

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') dt' = x_0 + \int_0^t (v_0 + at') dt' = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2.6)$$

### Exemple 2.2

Considérons une particule en *mouvement harmonique*, dont l'accélération est donnée par  $a(t) = A \sin \omega t$ , où  $A$  et  $\omega$  sont des constantes. Trouvons une expression pour la vitesse et la position en fonction du temps. La vitesse instantanée est donnée par

$$v(t) = v_0 + \int_0^t A \sin \omega t' dt' = v_0 - \frac{A}{\omega} [\cos \omega t']_0^t = v_0 + \frac{A}{\omega} (1 - \cos \omega t) \quad (2.7)$$

et la position par

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left[ v_0 + \frac{A}{\omega} (1 - \cos \omega t') \right] dt' = x_0 + \left( v_0 + \frac{A}{\omega} \right) t - \frac{A}{\omega^2} \sin \omega t \quad (2.8)$$

La position possède une composante périodique dans le temps, de période  $T = 2\pi/\omega$ . La fréquence de ce mouvement est  $\nu = \omega/(2\pi)$ , et la quantité  $\omega$  est appelée *fréquence angulaire* ou *pulsation* et se mesure en radians par seconde (rad/s). Très souvent, on donne à  $\omega$  le nom de *fréquence*, le contexte assurant qu'il s'agit bien d'une fréquence angulaire (en rad/s) et non d'une fréquence mesurée en Hz.

**Exemple 2.3**

Anticipons un peu sur les lois de Newton et considérons un objet initialement au repos, sous l'influence d'une force de gravité constante et d'une force de résistance proportionnelle (et opposée) à la vitesse. Trouvons une expression pour la vitesse en fonction du temps. Utilisons une coordonnée verticale  $x$ , positive vers le bas. Écrivons l'accélération comme  $a = F/m$ , où  $F$  est la force totale (positive vers le bas), donnée par  $mg - m\gamma v$ , et  $m$  est la masse de la particule. Le deuxième terme est une force de résistance opposée à la vitesse instantanée, avec un coefficient  $\gamma$  ayant les unités d'un temps inverse. La relation entre la vitesse et l'accélération peut alors s'écrire comme

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \gamma v \quad (2.9)$$

Cette relation est plus pratique lorsqu'exprimée en fonction des différentielles de vitesse et de temps :

$$dv = (g - \gamma v) dt \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{g - \gamma v} = dt \quad (2.10)$$

Intégrons cette relation différentielle entre la vitesse initiale (zéro) et la vitesse finale au temps  $t$  ( $v$ ) :

$$\int_0^t dt' = t = \int_0^v \frac{dv'}{g - \gamma v'} = -\frac{1}{\gamma} \left[ \ln(g - \gamma v') \right]_0^v = -\frac{1}{\gamma} \ln(1 - \gamma v/g) \quad (2.11)$$

D'où on tire, en isolant  $v$ , que

$$e^{-\gamma t} = 1 - \frac{\gamma v}{g} \implies v(t) = \frac{g}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \quad (2.12)$$

On constate que la vitesse tend vers une valeur limite  $v_\infty = g/\gamma$  quand  $t \rightarrow \infty$  et que le temps nécessaire pour atteindre une fraction donnée de cette vitesse limite est uniquement fonction de  $\gamma$ .

## B Mouvement en trois dimensions

C'est principalement à Descartes qu'on doit l'idée de repérer un point dans l'espace (ou sur un plan) à l'aide de variables appelées *coordonnées*. La notation  $(x, y, z)$  utilisée pour ces coordonnées remonte à lui. Formuler le mouvement d'une particule dans l'espace ne présente pas de difficulté particulière par rapport au mouvement en une seule dimension. On doit introduire trois fonctions du temps :  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ . On peut de même définir les vitesses associées à chacune des trois coordonnées :  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  et  $\dot{z}(t)$  et ainsi de suite.

Cependant, le choix des axes cartésiens est arbitraire. On peut à loisir utiliser un deuxième ensemble d'axes, en rotation par rapport à un ensemble d'axes donnés, et la description d'un système physique devrait se faire également aisément, quel que soit le système d'axes utilisé. De plus, la formulation des principes de la mécanique doit être indépendante des axes cartésiens choisis et devrait être faite, idéalement, dans un langage qui ne dépend pas de ces axes. C'est pour cette raison que la notion de vecteur a été progressivement introduite au début du 20<sup>e</sup> siècle.

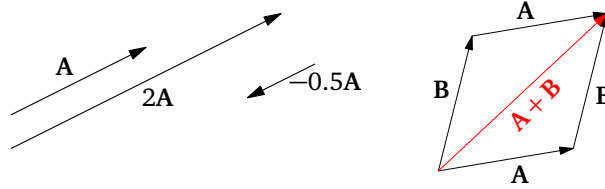
### 2.B.1 Vecteurs

Nous adopterons une approche géométrique à la définition des vecteurs ; elle est plus intuitive et plus appropriée à ce cours. Avertissement : ce qui suit ne constitue pas un exposé logiquement structuré de la théorie des espaces vectoriels, mais plutôt un rappel de définitions géométriques et de propriétés utiles.

Un vecteur est une quantité définie dans l'espace et possédant une grandeur et une direction. Pour caractériser un vecteur, on doit donc spécifier ces deux aspects, grandeur et direction. Dans ces notes, les vecteurs seront désignés en caractère gras, par exemple **A**, **B**, **f**, etc. La grandeur du vecteur **A** sera désignée par  $|\mathbf{A}|$  ou,

plus simplement, par la lettre  $A$ . Le prototype du vecteur est la position d'un point, notée  $\mathbf{r}$ , définie comme un segment orienté partant de l'origine  $O$  des coordonnées et aboutissant au point  $R$ . On écrit parfois  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OR}$ .

Un vecteur  $\mathbf{A}$  peut être multiplié par un nombre réel  $\lambda$ , opération que l'on note  $\lambda\mathbf{A}$ . Le résultat est un vecteur qui a la même direction que  $\mathbf{A}$ , mais une grandeur multipliée par  $\lambda$  (si  $\lambda$  est négatif, le résultat est dans la direction opposée à  $\mathbf{A}$ ). Un vecteur disparaît s'il est multiplié par zéro ; plus précisément, on obtient alors le vecteur nul, noté  $\mathbf{0}$ , qu'il faut en principe distinguer du nombre 0 (l'un est un vecteur, l'autre un nombre). Cependant, nous ne distinguerons généralement pas ces deux objets dans la notation, les deux étant souvent désignés par le symbole 0.



On définit aussi l'addition de deux vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , qu'on note  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  et qui s'obtient par la règle du parallélogramme, définie géométriquement sur la figure ci-dessus. D'après cette règle, la commutativité  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$  est manifeste. Signalons que tout vecteur  $\mathbf{A}$  possède un opposé, noté  $-\mathbf{A}$ , qui pointe dans la direction opposée (on dit parfois qu'il pointe dans la même direction, mais dans le sens opposé). L'addition des vecteurs et la multiplication par un scalaire possèdent les propriétés élémentaires suivantes :

- Associativité :  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ .
- Distributivité sur l'addition des vecteurs :  $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$
- Distributivité sur l'addition des scalaires :  $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$

### Produit scalaire

On définit généralement le *produit scalaire* de deux vecteurs dans l'espace, noté  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , comme le produit de leurs longueurs fois le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (2.13)$$

Le produit scalaire possède les propriétés suivantes, qui se démontrent par géométrie élémentaire :

- Distributivité :  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ .
- $(\lambda\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\lambda\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ .
- Positivité :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \geq 0$ . L'égalité ne se produit que si  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

La grandeur  $|\mathbf{A}|$  d'un vecteur  $\mathbf{A}$ , aussi appelée la *norme* de  $\mathbf{A}$ , est bien sûr la racine carrée positive du produit scalaire de  $\mathbf{A}$  par lui-même :

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \quad (2.14)$$

On utilise aussi la notation  $\mathbf{A}^2 \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ . Deux vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont dits *orthogonaux* si  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ . Géométriquement, ces deux vecteurs sont perpendiculaires, puisque le cosinus de l'angle qu'ils forment est nul.

Étant donnés deux vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , le vecteur  $\mathbf{B}$  peut être décomposé en deux parties,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$ , où  $\mathbf{B}_\perp$  est perpendiculaire à  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}_\parallel$  lui est parallèle. On vérifie que

$$\mathbf{B}_\parallel = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}{A^2} \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_\perp = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}{A^2} \mathbf{A} \quad (2.15)$$

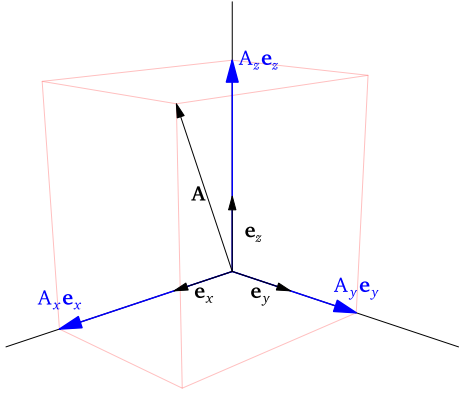
On appelle aussi  $\mathbf{B}_\parallel$  la *projection* de  $\mathbf{B}$  sur le vecteur  $\mathbf{A}$ .

### Base de vecteurs orthonormés

En trois dimensions, tout vecteur peut être exprimé de manière unique comme une combinaison linéaire de trois vecteurs de base. Étant donné un système d'axes cartésiens avec coordonnées  $(x, y, z)$ , on choisit généralement un ensemble de trois vecteurs de longueur unité (ou vecteurs *unitaires*), notés  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$  et pointant chacun dans la direction de l'axe correspondant. Ces trois vecteurs sont mutuellement orthogonaux et forment donc une base dite *orthonormée* :

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0 \quad (2.16)$$

On la qualifie de *base cartésienne* ou de *repère cartésien*. Tout vecteur  $\mathbf{A}$  peut alors être exprimé comme suit :

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \quad (2.17)$$


Étant donné que la base est orthonormée, on peut facilement retrouver les composantes par projection :

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_x \quad A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_y \quad A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_z \quad (2.18)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  s'exprime aisément en fonction de leurs composantes, en utilisant la distributivité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \cdot (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= A_x B_x \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x + A_x B_y \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y + \dots + A_z B_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ceci nous permet de calculer l'angle entre deux vecteurs dont on connaît les composantes, en retournant à la définition géométrique du produit scalaire :

$$\cos \angle(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} \quad (2.20)$$

Remarquons ici que différents vecteurs en physique ont des unités différentes : la position se mesure en mètres, la vitesse en mètres/seconde, etc. La grandeur d'un vecteur possède donc des unités et il faut prendre garde de combiner (c'est-à-dire comparer ou additionner) par erreur des vecteurs ayant des unités (ou dimensions) différentes. Les vecteurs orthonormés sont sans unité. Les unités d'une quantité physique vectorielle  $\mathbf{A}$  sont donc aussi celles de ses composantes  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$ .

## 2.B.2 Dérivées d'un vecteur : vitesse et accélération

Le mouvement d'un point dans l'espace peut être caractérisé mathématiquement par un vecteur  $\mathbf{r}(t)$  fonction du temps  $t$ . Ceci implique la donnée de trois fonctions du temps : une pour chaque composante du vecteur :

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z \quad (2.21)$$

Soyons plus général et considérons un vecteur  $\mathbf{A}(t)$  fonction du temps. On définit la dérivée par rapport au temps de ce vecteur comme la dérivée d'une fonction scalaire, par un processus de limite :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \varepsilon) - \mathbf{A}(t)}{\varepsilon} \quad (2.22)$$

La dérivée d'un vecteur est elle-même un vecteur.

Comme les vecteurs cartésiens unitaires  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$  sont indépendants du temps, la dérivée d'un vecteur s'exprime simplement en fonction des composantes cartésiennes :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{e}_z \quad (2.23)$$

Soit  $\lambda(t)$  un scalaire et  $\mathbf{A}(t)$  et  $\mathbf{B}(t)$  des vecteurs fonctions du temps. La règle de différentiation d'un produit s'applique au produit d'un vecteur par un scalaire, ou au produit de deux vecteurs :

$$\frac{d}{dt}(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt} \mathbf{A} \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (2.25)$$

Ces relations se vérifient facilement composante par composante, mais découlent aussi du fait que la définition de la dérivée d'un vecteur repose sur les opérations d'addition de vecteurs et de multiplication par un scalaire, qui sont associatives et distributives.

La *vitesse* (ou vecteur vitesse) d'une particule est simplement définie comme la dérivée par rapport au temps de sa position :

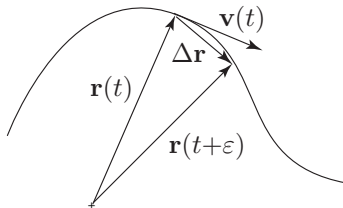
$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad (2.26)$$

En fonction des coordonnées cartésiennes (les composantes de  $\mathbf{r}$ ), cette définition est simplement la suivante :

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z \quad (2.27)$$

$$= v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \quad (2.28)$$

La notion de limite par laquelle la vitesse est définie,

$$\mathbf{v} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \varepsilon) - \mathbf{r}(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\varepsilon} \quad (2.29)$$


démontre clairement que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire de la particule en mouvement. En effet, dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la différence  $\Delta \mathbf{r}$  devient manifestement parallèle à la tangente à la trajectoire.

L'*accélération* (ou vecteur accélération) est à son tour définie comme la dérivée par rapport au temps de la vitesse :

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \quad (2.30)$$

En fonction des composantes, ceci devient :

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{e}_z \quad (2.31)$$

$$= a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z \quad (2.32)$$

Il faut garder à l'esprit que, pour une trajectoire  $\mathbf{r}(t)$  quelconque, la vitesse  $\mathbf{v}$ , l'accélération  $\mathbf{a}$  et les dérivées d'ordre supérieur sont aussi des fonctions du temps. L'un des apports principaux du calcul différentiel dans l'histoire des idées est d'avoir justement clarifié les notions de vitesse et d'accélération. La notion de vitesse ou d'accélération *instantanée* peut sembler intuitivement claire de nos jours, mais sa définition précise nécessite les notions de limite et de dérivée. À l'époque de l'invention du calcul différentiel, la notion de dérivée était étroitement liée à celle de vitesse, sans nécessairement reposer sur une base mathématique solide. Ce n'est qu'au début du XIX<sup>e</sup> siècle que les notions de limite et de continuité ont été clairement définies.

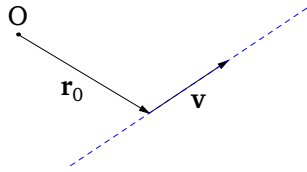
#### Exemple 2.4 Mouvement linéaire

Considérons une particule se déplaçant dans l'espace avec une vitesse constante  $\mathbf{v}$  et une position  $\mathbf{r}_0$  au temps  $t = 0$ . La position en fonction du temps s'obtient par intégration :

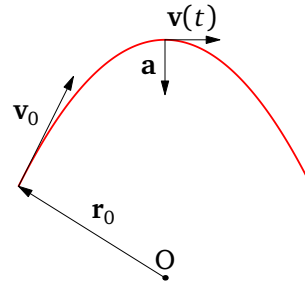
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v} dt' = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t \quad (2.33)$$

Techniquement, l'intégrale que nous venons d'effectuer est constituée de trois intégrales, une pour chaque composante de l'intégrand, qui est un vecteur. En composantes cartésiennes, cette relation s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} x(t) = v_x t + x_0 \\ y(t) = v_y t + y_0 \\ z(t) = v_z t + z_0 \end{cases} \quad (2.34)$$



Exemple 2.4



Exemple 2.5

#### Exemple 2.5 Mouvement parabolique

Considérons maintenant une particule se déplaçant avec une accélération  $\mathbf{a}$  constante, une vitesse initiale  $\mathbf{v}_0$  et une position initiale  $\mathbf{r}_0$ . La vitesse s'obtient alors par une première intégration :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a} dt' = \mathbf{a}t + \mathbf{v}_0 \quad (2.35)$$

On peut ensuite intégrer la vitesse pour retrouver la position :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t (\mathbf{a}t' + \mathbf{v}_0) dt' = \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \quad (2.36)$$

Notons ici que la vitesse initiale n'a pas nécessairement la même direction que l'accélération constante  $\mathbf{a}$ , de sorte que le mouvement n'est pas rectiligne en général, mais plutôt parabolique. Pour le démontrer, choisissons un système d'axes particulier dans lequel  $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{v}_0 = v_{0z}\mathbf{e}_z + v_{0x}\mathbf{e}_x$  (il est toujours possible de choisir les axes  $x, y, z$  de la sorte). Choisissons aussi la position de l'origine de telle sorte que  $\mathbf{r}_0 = 0$ . Avec ces simplifications, la position de la particule

en fonction du temps s'écrit :

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 + \mathbf{v}_0 t \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_{0z} t \\ x(t) = v_{0x} t \end{cases} \quad (2.37)$$

On peut éliminer le temps de ces équations et exprimer la coordonnée  $z$  en fonction de  $x$  :

$$t = \frac{x}{v_{0x}} \implies z = \frac{a}{2v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x \quad (2.38)$$

$z$  est donc une fonction quadratique de  $x$  et la trajectoire de la particule est une parabole, comme illustré à l'éq. (2.39).

### Exemple 2.6 Portée d'un projectile

Retournons à l'exemple 2.B.2, dans le contexte du tir d'un projectile à la surface de la Terre. Dans ce cas, l'accélération constante est dirigée vers le bas et vaut  $a = -g$ , l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre. L'angle  $\theta$  que fait la vitesse initiale avec l'horizontale est appelé *angle de tir*. Comme les composantes de la vitesse initiale sont  $v_{0x} = v_0 \cos \theta$  et  $v_{0z} = v_0 \sin \theta$ , on peut exprimer la trajectoire de la particule en fonction de l'angle de tir comme suit :

$$z(x) = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (2.39)$$

La *portée*  $p$  d'un projectile est la distance entre le point de tir et le point de retour au sol. Si le projectile est tiré à partir du sol et que celui-ci est parfaitement horizontal, la portée  $p$  s'obtient en résolvant l'équation (2.39) pour  $z = 0$ . La solution est soit  $x = 0$  (le point de départ), soit  $x = p$  où

$$p = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \quad (2.40)$$

En fonction de  $\theta$ , cette portée est maximale quand  $\theta = \pi/4$ . D'autre part, la portée augmente avec  $v_0$  et diminue avec  $g$ . Remarquons cependant que l'angle de portée maximale n'est plus le même si la résistance de l'air est prise en compte, ou si le projectile n'est pas lancé du niveau du sol. Supposons, en particulier, que le projectile est lancé d'une hauteur  $h$  au-dessus du sol. On montre que la portée du projectile est alors

$$p = \frac{v_0^2}{2g} \left\{ \sin 2\theta + \sqrt{\frac{8gh}{v_0^2} \cos^2 \theta + \sin^2 2\theta} \right\} \quad (2.41)$$

où on a bien sûr négligé encore une fois la résistance de l'air.

### Exemple 2.7 Mouvement circulaire uniforme

Considérons une particule en mouvement circulaire uniforme, sur un cercle de rayon  $R$ , à une vitesse angulaire  $\omega$ . Si on choisit l'axe des  $z$  comme axe de rotation et le centre du cercle comme origine, alors la position de cette particule en fonction du temps est

$$\mathbf{r}(t) = R(\mathbf{e}_x \cos \omega t + \mathbf{e}_y \sin \omega t) \quad (2.42)$$

Autrement dit, à l'instant  $t$ , l'angle que fait le vecteur  $\mathbf{r}$  avec l'axe des  $x$  est  $\varphi = \omega t$  : il augmente uniformément avec le temps. Calculons la vitesse et l'accélération :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \omega R(-\mathbf{e}_x \sin \omega t + \mathbf{e}_y \cos \omega t) \\ \mathbf{a}(t) &= -\omega^2 R(\mathbf{e}_x \cos \omega t + \mathbf{e}_y \sin \omega t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

La vitesse et l'accélération ont les grandeurs suivantes :

$$\boxed{v = |\omega| R \quad a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}} \quad (2.44)$$

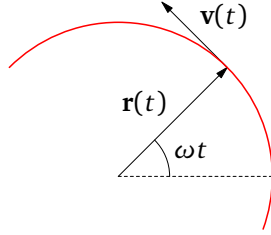
On constate, dans ce cas, que la vitesse est perpendiculaire à la position ( $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$ ) et que l'accélération est perpendiculaire à la vitesse ( $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 0$ ) en tout temps. Ces propriétés découlent simplement du fait que la grandeur de la



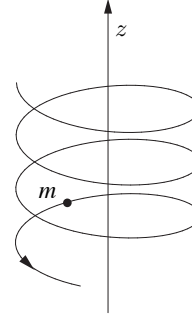
position et de la vitesse sont constantes :  $\mathbf{r}^2 = R^2$  et  $\mathbf{v}^2 = \omega^2 R^2$ . Un apport important de la notion de vecteur est donc la facilité avec laquelle on conçoit une accélération non nulle même si la grandeur de la vitesse est constante. En général, si un vecteur  $\mathbf{A}(t)$  dépend du temps, mais que sa norme est constante, la dérivée de ce vecteur lui est perpendiculaire :

$$0 = \frac{d}{dt} \mathbf{A}^2 = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (2.45)$$

L'accélération, dans le mouvement circulaire, est opposée à la position et est qualifiée de *centripète*, car elle est dirigée vers le centre du cercle.



Exemple 2.7



Exemple 2.8

### Exemple 2.8 Mouvement hélicoïdal

Une particule glisse le long d'un fil de fer enroulé en spirale (ou hélice) verticale. Le rayon de l'hélice est  $R$  et la distance verticale entre deux enroulements est  $a$ . On suppose que la particule se déplace à vitesse angulaire constante. La position, la vitesse et l'accélération prennent alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= R(\mathbf{e}_x \cos \omega t + \mathbf{e}_y \sin \omega t) - \frac{\omega t}{2\pi} a \mathbf{e}_z \\ \mathbf{v}(t) &= \omega R(-\mathbf{e}_x \sin \omega t + \mathbf{e}_y \cos \omega t) - \frac{\omega a}{2\pi} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{a}(t) &= -\omega^2 R(\mathbf{e}_x \cos \omega t + \mathbf{e}_y \sin \omega t) = -\omega^2 \mathbf{r}_\perp(t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

On a supposé que la particule est à  $z = 0$  à  $t = 0$  et que la spirale descend dans le sens antihoraire. Notons que  $\mathbf{r}_\perp$  désigne la projection de la position sur le plan  $xy$ , perpendiculaire à l'axe de l'hélice. Dans ce cas l'accélération est perpendiculaire à la vitesse (et dirigée vers le centre), car la vitesse a encore une grandeur constante.

### Exemple 2.9

Considérons une particule animée d'une accélération constante en direction, mais dont la grandeur diminue exponentiellement dans le temps :  $\mathbf{a}(t) = a_0 e^{-\gamma t} \mathbf{e}_z$ . Ici  $a_0$  est une constante égale à la grandeur de l'accélération à  $t = 0$ . La vitesse et la position s'obtiennent facilement :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_0 + a_0 \mathbf{e}_z \int_0^t e^{-\gamma t'} dt' = \frac{a_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \mathbf{e}_z + \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{r}(t) &= \frac{a_0}{\gamma} \mathbf{e}_z \int_0^t (1 - e^{-\gamma t'}) dt' + \int_0^t \mathbf{v}_0 dt' + \mathbf{r}_0 = \frac{a_0}{\gamma} \left( t - \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \right) \mathbf{e}_z + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

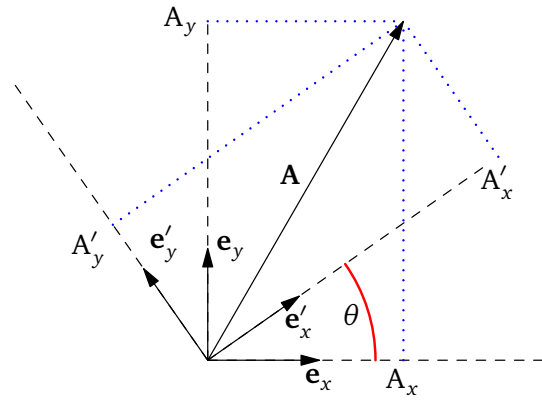
## C Rotations

Il arrive souvent qu'un problème tridimensionnel soit plus facile à étudier en utilisant successivement plus d'une base de vecteurs unitaires, reliées entre elles par des rotations. L'exemple le plus simple d'un tel changement de base est fourni par une rotation des axes  $x$  et  $y$  d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $z$ . D'après la figure 2.2, la relation entre les vecteurs de base après et avant la rotation est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x' &= \mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta \\ \mathbf{e}_y' &= -\mathbf{e}_x \sin \theta + \mathbf{e}_y \cos \theta \\ \mathbf{e}_z' &= \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.48)$$

FIGURE 2.2

Rotation des axes cartésiens d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $z$ .



Un vecteur  $\mathbf{A}$  quelconque peut s'exprimer soit dans une base, soit dans l'autre :

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z = A'_x \mathbf{e}_x' + A'_y \mathbf{e}_y' + A'_z \mathbf{e}_z' \quad (2.49)$$

En substituant dans cette expression la relation (2.48), on trouve

$$\mathbf{A} = (A'_x \cos \theta - A'_y \sin \theta) \mathbf{e}_x + (A'_x \sin \theta + A'_y \cos \theta) \mathbf{e}_y + A'_z \mathbf{e}_z \quad (2.50)$$

il s'ensuit immédiatement que

$$\begin{aligned} A_x &= A'_x \cos \theta - A'_y \sin \theta \\ A_y &= A'_x \sin \theta + A'_y \cos \theta \\ A_z &= A'_z \end{aligned} \quad (2.51)$$

Cette relation peut se mettre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Si on veut maintenant exprimer les composantes primées en fonction des composantes non primées, il faut inverser cette matrice. Or, on vérifie facilement que l'inverse de cette matrice est obtenu simplement en inversant le signe de  $\theta$ , ce qui revient à prendre la transposée de la matrice :

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Une matrice dont l'inverse est égale à sa transposée est dite *orthogonale*. Toutes les matrices de rotation sont orthogonales.

Une rotation par rapport à un autre axe s'exprime de manière similaire. Par exemple, une rotation d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe des  $x$  correspond à la transformation suivante des composantes d'un vecteur :

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

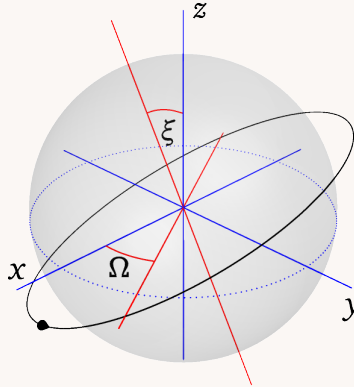
Les opérations de rotation exprimées ici sont qualifiées de *passives*, car le vecteur  $\mathbf{A}$  ne change pas : seuls les vecteurs de base changent, ce qui entraîne un changement dans les composantes de  $\mathbf{A}$ . On peut également considérer des rotations *actives*, qui appliquent un changement réel au vecteur  $\mathbf{A}$ , les vecteurs de base étant fixes. Suite à une rotation active antihoraire d'angle  $\theta$  par rapport à l'axe des  $z$ , les composantes de  $\mathbf{A}$  sont modifiées ainsi :

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (\text{rotation active}) \quad (2.55)$$

La forme de la rotation est l'inverse d'une rotation passive.

### Exemple 2.10

Un satellite suit une orbite circulaire de rayon  $r$  et de pulsation  $\omega$  autour de la Terre. Cette orbite est inclinée d'un angle  $\xi$  par rapport au plan de l'équateur. De plus, le plan de cette orbite coupe le plan de l'équateur à une longitude  $\Omega$  par rapport au point vernal (un point fixe dans l'espace, dans le plan équatorial de la Terre). Le problème est d'exprimer les coordonnées  $(x, y, z)$  du satellite en fonction du temps, dans un système cartésien centré sur la Terre où l'axe des  $z$  est parallèle à l'axe de rotation de la Terre et où l'axe des  $x$  est fixé, par exemple, sur le point vernal.



Utilisons des rotations actives pour résoudre ce problème. Supposons premièrement que l'orbite du satellite coïncide avec l'équateur terrestre. La position du satellite peut alors s'écrire

$$\mathbf{r}(t) = r(\cos \omega t \mathbf{e}_x + \sin \omega t \mathbf{e}_y) \quad (2.56)$$

Pour incliner l'orbite d'un angle  $\xi$ , appliquons une rotation active par rapport à l'axe des  $x$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi & -\sin \xi \\ 0 & \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \cos \xi \sin \omega t \\ r \sin \xi \sin \omega t \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Ensuite, pour placer la ligne des noeuds à un angle  $\Omega$  de l'axe des  $x$ , appliquons au résultat une rotation active par rapport à l'axe des  $z$  :

$$\begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \cos \xi \sin \omega t \\ r \sin \xi \sin \omega t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\Omega \cos \omega t - \sin\Omega \cos \xi \sin \omega t \\ \sin\Omega \cos \omega t + \cos\Omega \cos \xi \sin \omega t \\ \sin \xi \sin \omega t \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

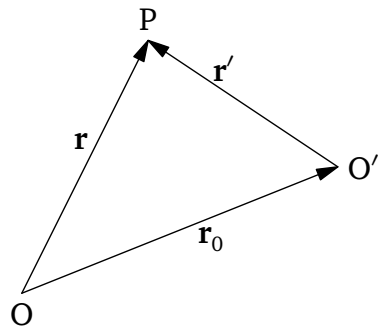
Donc la position du satellite en fonction du temps est

$$\mathbf{r}(t) = r(\cos\Omega \cos \omega t - \sin\Omega \cos \xi \sin \omega t)\mathbf{e}_x + r(\sin\Omega \cos \omega t + \cos\Omega \cos \xi \sin \omega t)\mathbf{e}_y + r \sin \xi \sin \omega t \mathbf{e}_z \quad (2.59)$$

## D Référentiels

### 2.D.1 Changement d'origine

Nous appellerons *repère* un système de coordonnées défini par une origine et des axes cartésiens. Deux repères peuvent différer par l'orientation des axes, comme étudié à la section précédente. Ils peuvent également différer par leur origine. Si le vecteur position, en tant que vecteur, ne dépend pas de l'orientation des axes, il dépend évidemment du choix de l'origine dans l'espace. Considérons deux origines différentes, notées  $O$  et  $O'$ , que nous appellerons respectivement l'*ancienne* et la *nouvelle* origine. Si la position de la nouvelle origine  $O'$  est donnée par le vecteur  $\mathbf{r}_0$  en fonction de l'ancienne origine, la relation entre l'ancien vecteur position  $\mathbf{r}$  et le nouveau  $\mathbf{r}'$  est la suivante :



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 \quad (2.60)$$

Signalons ici le caractère particulier du vecteur position. La plupart des autres vecteurs utilisés en physique (vitesse, accélération, force, champ électrique, etc.) sont indépendants du choix de l'origine. En fait, ces autres vecteurs sont d'une façon ou l'autre reliés à des *différences* entre des vecteurs positions. Par exemple, la vitesse d'une particule est la dérivée de son vecteur position par rapport au temps et est donc construite en prenant la différence entre deux vecteurs positions à des instants voisins, par un procédé de limite. Or, si le vecteur position lui-même dépend du choix de l'origine, il est clair d'après la formule (2.60) que la différence de deux positions prises dans un même repère est indépendante de ce choix.

## 2.D.2 Changement de référentiel

Deux repères peuvent être en mouvement relatif, soit parce que leurs origines se déplacent l'une par rapport à l'autre, soit parce que l'orientation relative des deux repères change avec le temps. Notons que nous ne pouvons décrire que le mouvement *relatif* de deux repères et non le mouvement absolu d'un repère, notion qui n'a pas de sens.

Bien entendu, on peut fort bien utiliser une variété de repères différents qui ne sont pas en mouvement les uns par rapport aux autres. Par exemple, il peut s'agir de deux repères cartésiens qui diffèrent seulement par le choix de l'origine, ou par l'orientation des axes (aux fins de la présente discussion, il est suffisant de se limiter aux repères cartésiens). On dira que ces deux repères appartiennent au même *référentiel*, puisqu'ils ne sont pas en mouvement relatif. Au contraire, deux repères cartésiens qui se déplacent à une vitesse constante l'un par rapport à l'autre n'appartiennent pas au même référentiel. Notez qu'une quantité comme la vitesse  $\mathbf{v}$  d'une particule ne dépend pas du repère utilisé (c.-à-d. de son origine ou de son orientation) pourvu que l'on demeure dans le même référentiel. En contrepartie, la vitesse d'une particule dépend du référentiel d'observation.

Considérons le cas d'un repère cartésien  $R'$  qui coïncide avec un autre repère  $R$  (même origine et mêmes axes) au temps  $t = 0$ , mais dont l'origine  $O'$  se déplace à une vitesse constante  $\mathbf{V}$  par rapport au repère  $R$  (fig. 2.3). Au temps  $t$ , la position  $\mathbf{r}_0$  de l'origine  $O'$  sera  $\mathbf{V}t$ . En supposant que la relation entre les deux repères puisse s'obtenir simplement de la formule (2.60) avec un vecteur de translation  $\mathbf{r}_0$  qui dépend du temps, alors la position  $\mathbf{r}'$  d'un point tel que décrit dans le repère  $R'$  s'exprimera ainsi en fonction de la position  $\mathbf{r}$  du même point dans le repère  $R$  :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \quad (2.61)$$

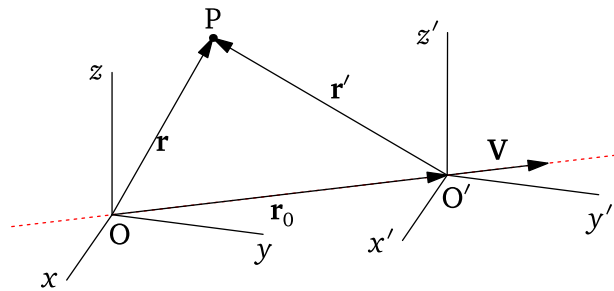
D'autre part, on suppose tout aussi naturellement que le temps  $t$  s'écoule de la même façon dans les deux référentiels. Autrement dit, on ne fait pas de distinction entre le temps  $t'$  tel qu'il s'écoule dans le référentiel de  $R'$  et le temps  $t$  dans le référentiel de  $R$  :  $t' = t$ . En supposant, par exemple, que la vitesse relative  $\mathbf{V}$  est dirigée selon l'axe des  $x$ , ( $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$ ), alors la relation entre les coordonnées d'espace et de temps des deux référentiels est la suivante :

$$x' = x - Vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t \quad (2.62)$$

Cette relation est la *transformation de Galilée*. Aussi naturelle qu'elle puisse paraître, cette transformation n'est pas physiquement correcte. En fait, le temps ne s'écoule pas tout à fait de la même façon dans les deux référentiels et la relation entre les coordonnées spatiales ne peut pas simplement s'obtenir de la relation (2.60) avec  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{V}t$ . Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 10. La relation correcte entre les coordonnées cartésiennes de deux référentiels est une question qui ne se résout pas seulement par des considérations mathématiques : il s'agit d'une question physique qui se résout ultimement par l'expérience. Cependant, la transformation de Galilée (2.62) est adéquate en pratique, tant que la vitesse  $V$  est petite par rapport à la vitesse de la lumière  $c$ .

FIGURE 2.3

Deux repères dont les origines  $O$  et  $O'$  et les axes coïncident à  $t = 0$ , alors que  $O'$  est animé d'une vitesse  $\mathbf{V}$  par rapport à  $O$ .



### 2.D.3 Transformation de la vitesse et de l'accélération

Soit  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  la vitesse d'une particule dans le référentiel  $S$  et  $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt'$  sa vitesse dans le référentiel  $S'$ . La transformation (2.62) nous permet de relier  $\mathbf{v}$  à  $\mathbf{v}'$  :

$$\mathbf{v}' \equiv \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{V} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{V} \quad (2.63)$$

D'autre part, l'accélération  $\mathbf{a}$  d'une particule est la même dans les deux référentiels, car  $\mathbf{V}$  est une constante indépendante du temps :

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} - \mathbf{V}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} \quad \left( \frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0 \right) \quad (2.64)$$

On dit que l'accélération  $\mathbf{a}$  est *invariante* par la transformation de Galilée.

#### Exemple 2.11 Le nageur et la rivière

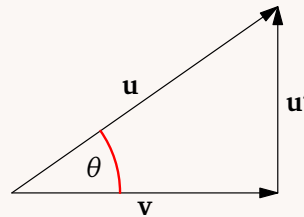
Un nageur doit traverser une rivière pour atteindre un point exactement opposé à son point de départ, sur l'autre rive. En supposant que le courant atteint une vitesse  $u$  et que le nageur peut, lui, atteindre une vitesse  $v$  dans une eau calme, dans quelle direction par rapport à la perpendiculaire doit-il se diriger pour atteindre son but? Utilisons un système d'axes dans lequel la rivière s'écoule localement dans la direction  $-\mathbf{e}_y$ , le nageur partant de l'origine pour se diriger vers le point  $a\mathbf{e}_x$ ,  $a$  étant la largeur de la rivière. Soit  $S'$  le référentiel de la rive, et  $S$  le référentiel dans lequel l'eau est au repos, et qui se déplace à une vitesse  $-\mathbf{V} = -u\mathbf{e}_y$ , par rapport à  $S'$ . La vitesse du nageur dans  $S$  est de grandeur  $v$ , et doit faire un angle  $\theta$  par rapport à l'axe des  $x$  :  $\mathbf{v} = v(\cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y)$ . Sa vitesse dans  $S'$  est alors  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$  et doit être exactement parallèle à  $\mathbf{e}_x$ , donc avoir une composante en  $y$  nulle, ce qui se traduit par  $v\sin\theta = u$ . Donc l'angle désiré est  $\theta = \arcsin(u/v)$ . Bien sûr, cette solution n'existe que si  $u < v$  : la vitesse du nageur doit excéder celle du courant, sinon il ne pourra jamais rester sur place, encore moins atteindre l'autre rive.

#### Exemple 2.12 Courir le vent de côté

Lors de son jogging matinal, un coureur maintient une vitesse constante  $v$ , alors que le vent a une vitesse  $u$  par rapport au sol. En supposant qu'il ait exactement le vent dans le dos, de quel angle doit-il tourner afin d'avoir le vent exactement de côté? Dans quelles conditions est-ce possible?

Soit  $\mathbf{v}$  le nouveau vecteur vitesse du coureur, après son changement de direction. Le référentiel  $S'$  du coureur se déplace alors à une vitesse  $\mathbf{v}$  par rapport au sol (le référentiel du sol est  $S$ ). La vitesse du vent dans ce référentiel est donc  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ , selon la formule de la transformation de Galilée. Les vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{u}'$  étant perpendiculaires, ils forment les côtés d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le vecteur  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u}'$ . L'angle  $\theta$  entre  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{u}$  est alors tel que  $\cos\theta = v/u$ , ou encore

$$\theta = \arccos \frac{v}{u}$$



(2.65)

Ceci n'est possible que si  $v < u$ , bien sûr, mais comme le coureur a le vent dans le dos au départ, c'est certainement le cas.

## Problèmes

### Problème 2.1

Un faisceau de particules possède une densité de  $\lambda$  particules par unité de longueur et ces particules ont une vitesse commune  $v$  et une masse commune  $m$ . Le faisceau pénètre dans une cavité de longueur  $L$  dans laquelle une force uniforme et constante  $F$  confère aux particules une accélération constante. Quelle sera la densité  $\lambda'$  des particules à la sortie de la cavité?

### Problème 2.2

L'accélération d'une particule en une dimension est donnée par  $a(t) = -g \cos \omega t$ . Sa vitesse initiale (à  $t = 0$ ) est notée  $v_0$  et sa position initiale est  $x_0$ . Calculez la position  $x(t)$  de cette particule en fonction du temps.

### Problème 2.3

À partir de la définition géométrique du produit scalaire, démontrez-en la distributivité :  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ .

### Problème 2.4

Démontrez la relation (2.41).

### Problème 2.5

Vous êtes responsable d'un canon antichar situé à l'origine. Un char ennemi est situé à une distance  $d$ , sur l'axe des  $x$  ( $\mathbf{r} = d\mathbf{e}_x$ ) à  $t = 0$  et possède une vitesse constante  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_y$ . Votre canon peut tirer un obus de vitesse  $v_0$  (à la sortie du canon). Vous avez le contrôle sur l'angle de tir  $\theta$  (mesuré par rapport à l'horizontale) et sur l'angle azimutal  $\varphi$  (la direction de tir dans le plan  $xy$ , mesurée par rapport à l'axe des  $x$ ). Le problème est de choisir  $\theta$  et  $\varphi$  de façon à atteindre la cible. Les variables suivantes sont utiles :  $w = \sin^2 \theta$  et  $p = v_0^2/g$  ( $p$  est la portée maximale du canon). On néglige complètement la résistance de l'air.

**A** Quelles sont les conditions à imposer sur  $d$  et  $u$  pour qu'il soit possible d'atteindre la cible?

**B** Montrez que, pour atteindre la cible, on doit choisir

$$w = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{u}{v_0} \right)^2 \pm \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{u}{v_0} \right)^2 \right]^2 - \left( \frac{d}{p} \right)^2} \right\} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{2uv_0}{gd} \sqrt{w}$$

(Indice : considérez  $s$ , la distance entre l'origine et le char au temps  $t$  où il est atteint, et exprimez  $s$  de deux façons différentes). Quelle est la signification physique des deux solutions (+ et -) et, en pratique, laquelle des deux préférez-vous si vous étiez artilleur?

**C** Donnez une expression très simple pour  $\theta$  dans l'approximation  $u \ll v_0$  et  $d \ll p$  (utilisez un développement de Taylor), pour les deux solutions ci-haut (+ et -).

### Problème 2.6

L'une des extrémités d'un ressort obéissant à la loi de Hooke est fixée à l'origine et l'autre extrémité à une masse  $m$ . Cette masse est libre de se déplacer sans frottement sur un plan (le plan  $x y$ ). En négligeant la masse du ressort, on peut montrer que la position de la masse en fonction du temps est

$$\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{e}_x + b \sin \omega t \mathbf{e}_y$$

où  $\omega = \sqrt{k/m}$  est une fréquence angulaire,  $k$  est la constante de rappel du ressort et  $a, b$  sont des constantes.

**A** Calculez la vitesse  $\mathbf{v}$  en fonction du temps.

**B** Calculez l'accélération  $\mathbf{a}$  en fonction du temps. Le résultat est-il compatible avec la deuxième loi de Newton  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ? Notez que  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$  dans le cas d'un ressort.

**C** Vérifiez que la quantité

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} k \mathbf{r}^2$$

ne dépend pas du temps. C'est en fait l'énergie totale (cinétique + potentielle) de la masse.

### Problème 2.7

La position d'une particule en fonction du temps est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{r}(t) = R \cos(\omega t) \mathbf{e}_x + R \sin(\omega t) \mathbf{e}_y - v_x t \mathbf{e}_x$$

où  $R, v_x$  et  $\omega$  sont des constantes ( $R > 0$ ).

**A** Tracez approximativement cette courbe sur le plan  $x y$  (choisissez une valeur positive de  $v_x$ ).

**B** À quel endroit sur cette courbe la vitesse  $v = |\mathbf{v}|$  de la particule est-elle maximale?

**C** Dans la même veine, que peut-on dire de l'accélération?

### Problème 2.8

Une planète est en orbite circulaire de rayon  $R_1$  et de période  $T_1$  autour d'une étoile fixe située à l'origine. Un satellite est en orbite circulaire de rayon  $R_2$  et de période  $T_2$  autour de cette planète. Les orbites sont toutes dans le plan  $x y$  et la planète et le satellite sont sur l'axe des  $x$  à  $t = 0$ . Écrivez une expression explicite pour la position  $\mathbf{r}(t)$  du satellite par rapport à l'étoile.

### Problème 2.9

Le mouvement d'une particule est donné par le vecteur position suivant :

$$\mathbf{r}(t) = R e^{-\gamma t} (\cos \omega t \mathbf{e}_x + \sin \omega t \mathbf{e}_y)$$

On supposera que  $\gamma < \omega$ .

**A** Faites un schéma (graphique sommaire) de cette trajectoire sur le plan  $x y$ .



- B** Calculez le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$ , sa grandeur, ainsi que l'angle entre  $\mathbf{v}$  et le vecteur position. Cet angle est-il constant au cours du temps?
- C** Calculez l'accélération  $\mathbf{a}$  de la particule et exprimez-la en fonction de  $\mathbf{r}$  et de  $\mathbf{v}$ .
- D** La trajectoire ci-haut est celle que suivrait une particule soumise à une force de rappel (comme celle d'un ressort) toujours dirigée vers l'origine et proportionnelle à la distance  $r$  entre la particule et l'origine, plus une force de résistance opposée à la vitesse et proportionnelle à la grandeur de la vitesse. Démontrez cette assertion, sachant que  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  ( $m$  est la masse de la particule).

### Problème 2.10 Bille glissant sur un fil hélicoïdal

Une bille percée de masse  $m$  est contrainte de glisser le long d'un fil rigide hélicoïdal, sous l'effet de la gravité, comme illustré à l'exemple 2.B.2. La bille est soumise à la force de gravité  $\mathbf{F}_{\text{grav.}} = -mg\mathbf{e}_z$  et pourtant elle tombe à une vitesse angulaire constante. Ceci signifie qu'une force de frottement agit sur la bille le long du fil. Cette force est nécessairement dirigée le long du fil, dans la direction opposée à la vitesse. Calculez la grandeur de cette force. Indice : vous devez connaître la composante de  $\mathbf{F}_{\text{grav.}}$  le long du fil.

### Problème 2.11

Revenons au satellite de l'exemple 2.10. Supposons dans ce cas que  $\Omega = 0$ .

- A** Calculez le vecteur vitesse du satellite en fonction du temps, ainsi que le vecteur accélération.
- B** Donnez la latitude  $\lambda$  du satellite en fonction du temps.

Pour représenter la surface terrestre sur un plan, on utilise souvent la projection de *Mercator*, qui s'obtient de la manière suivante : on enroule un cylindre de rayon  $R$  autour de la Terre; on trace une droite qui part du centre de la Terre et qui passe par un point de coordonnées sphériques  $(\varphi, \theta)$  sur la surface de la Terre. L'intersection de cette droite avec le cylindre est le point représentatif de  $(\varphi, \theta)$  sur le cylindre. Utilisons sur le cylindre les coordonnées  $(u, v)$ , qui sont les coordonnées cartésiennes sur le cylindre lorsque celui-ci est déroulé sur un plan. La relation entre  $(u, v)$  et  $(\varphi, \theta)$  est donc

$$u = R\varphi \quad v = R \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

- C** Donnez une expression pour les coordonnées de Mercator du satellite en fonction du temps. Supposez en outre que la Terre tourne avec une fréquence angulaire  $\Omega$  et tracez l'allure de la trajectoire  $(u(t), v(t))$  pour un satellite de période  $T = 4$  heures (aidez-vous d'un ordinateur).

### Problème 2.12

- A** Une particule décrit un mouvement circulaire uniforme à une vitesse angulaire  $\omega$ . On choisit l'axe des  $z$  comme axe de rotation et l'origine au centre du cercle. Au temps  $t = 0$ , la particule se trouve sur l'axe des  $x$  et sa vitesse est  $v\mathbf{e}_y$ . Montrez qu'à l'instant  $t$  sa vitesse est donnée par

$$\mathbf{v}(t) = -\mathbf{e}_x v \sin \omega t + \mathbf{e}_y v \cos \omega t$$

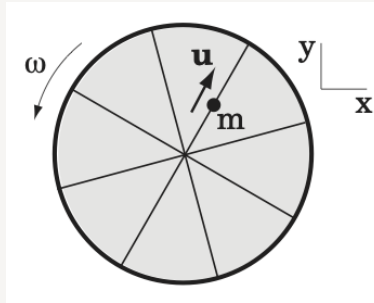
Effectuez le calcul en appliquant sur le vecteur vitesse initiale une rotation active d'un angle  $\omega t$  autour de l'axe des  $z$

- B** Calculez l'accélération  $\mathbf{a}(t)$  de la particule.
- C** Montrez que l'accélération est en tout temps perpendiculaire à la vitesse.
- D** Calculez la position  $\mathbf{r}(t)$  de la particule.
- E** Exprimez le rayon  $R$  du cercle et la grandeur de l'accélération en termes de  $\omega$  et  $v$ .

(auteur : M. Pioro-Ladrière)

### Problème 2.13

Une bille est contrainte de se déplacer le long du rayon d'une roue avec une vitesse  $\mathbf{u}$  de grandeur constante  $u$ , tel qu'illustré. La roue tourne à une vitesse angulaire  $\omega$  autour d'un axe fixe. Au temps  $t = 0$ , le rayon est orienté selon  $x$  et la bille se situe au centre de la roue.



- A** Montrez qu'à l'instant  $t$  le vecteur  $\mathbf{u}(t)$  est donné par

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{e}_x u \cos \omega t + \mathbf{e}_y u \sin \omega t$$

Effectuez le calcul en appliquant sur le vecteur initial  $\mathbf{u}(0)$  une rotation *active* d'un angle  $\theta = \omega t$  autour de l'axe de la roue.

- B** Montrez que la vitesse *totale* de la bille incluant le mouvement contraint et le mouvement circulaire, est donnée par

$$\mathbf{v}(t) = u(\cos \omega t - \omega t \sin \omega t)\mathbf{e}_x + u(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)\mathbf{e}_y$$

- C** Calculez l'accélération  $\mathbf{a}(t)$  de la bille.

(auteur : M. Pioro-Ladrière)

### Problème 2.14

Dans un référentiel  $S$ , une particule est en mouvement circulaire uniforme :

$$\mathbf{r}(t) = R(\cos \omega t \mathbf{e}_x + \sin \omega t \mathbf{e}_y)$$

Observons la même particule à partir d'un référentiel  $S'$  dont l'origine se déplace à une vitesse  $\mathbf{V}$  par rapport à  $S$ .

- A** Si  $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_z$ , à quoi ressemble la trajectoire de la particule vue de  $S'$ ? Donnez-en une expression analytique ( $\mathbf{r}'(t) = \dots$ ) et tracez-la.

**B** Reprenez l'exercice, cette fois pour  $\mathbf{V} = -\omega R \mathbf{e}_x$ .



## CHAPITRE 3

# LES LOIS DU MOUVEMENT

### A

### Les lois du mouvement de Newton

#### 3.A.1 Les *Principia* de Newton

Isaac Newton (1642/1727) publia ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* (en latin *Principia Mathematica Philosophiæ Naturalis*) en 1687. Dans cet ouvrage monumental, Newton cherche à expliquer le mouvement des objets à la fois terrestres et célestes à l'aide de principes unifiés formulés sous une forme mathématique. Citons la préface de Newton :

*Les anciens qui ne considérèrent guère autrement la pesanteur que dans le poids à remuer, cultivèrent cette partie de la Mécanique dans leurs cinq puissances qui regardent les arts manuels ; mais nous qui avons pour objet, non les Arts , mais l'avancement de la Philosophie, ne nous bornant pas à considérer seulement les puissances manuelles, mais celles que la nature emploie dans ses opérations, nous traitons principalement de la pesanteur, la légèreté, la force électrique, la résistance des fluides & les autres forces de cette espèce, soit attractives, soit répulsives : c'est pourquoi nous proposons ce que nous donnons ici comme les principes Mathématiques de la Philosophie naturelle. En effet toute la difficulté de la Philosophie paraît consister à trouver les forces qu'emploie la nature, par les phénomènes du mouvement que nous connaissons, & à démontrer ensuite, par là, les autres Phénomènes. C'est l'objet qu'on a eu en vue dans les propositions générales du Ier & Iie Livre , & on en donne un exemple dans le IIIe en expliquant le système de l'Univers : car on y détermine par les propositions mathématiques démontrées dans les deux premiers livres , les forces avec lesquelles les corps tendent vers le Soleil & les planètes ; après quoi, à l'aide des mêmes propositions mathématiques, on déduit de ces forces, les mouvements des planètes, des comètes, de la Lune & de la Mer. Il serait à désirer que les autres phénomènes que nous présente la nature puissent se dériver aussi heureusement des principes mécaniques : car plusieurs raisons me portent à soupçonner qu'ils dépendent tous de quelques forces dont les causes sont inconnues, & par lesquelles les particules des corps sont poussées les unes vers les autres, & s'unissent en figures régulières, ou sont repoussées & se fuient mutuellement ; & c'est l'ignorance où l'on a été jusqu'ici de ces forces, qui a empêché les Philosophes de tenter l'explication de la nature avec succès. J'espère que les principes que j'ai posés dans cet Ouvrage pourront être de quelque utilité à cette manière de philosopher, ou à quelque autre plus véritable, si je n'ai pas touché au but.*<sup>1</sup>

Cet extrait de la préface des *Principia* démontre à quel point Newton avait les vues larges et l'ambition de poser les bases d'une science nouvelle, révolutionnaire, basée à la fois sur une description mathématique du monde physique et sur un modèle particulier du monde, qu'on pourrait appeler le *modèle newtonien*. Dans ce modèle général, on suppose que l'Univers est composé d'une multitude de particules qui exercent

1. Traduction française de la marquise de Chastellet, Paris, 1756.

les unes sur les autres diverses forces. Ces particules, en retour, réagissent aux forces exercées en modifiant leur mouvement en accord avec les lois du mouvement que Newton a formulées. Newton a décrit dans son ouvrage sa théorie de la force gravitationnelle, qui constitue l'archétype de la force dans le modèle newtonien. Il formule l'espérance que tous les phénomènes de la Nature puissent être expliqués par les principes de la mécanique et la connaissance de forces fondamentales inconnues à son époque.

Cet idéal est encore, grosso modo, celui des scientifiques d'aujourd'hui, encore que nous soyons plus modestes et réalistes que Newton semblait l'être et que les physiciens aient développé il y a presque cent ans, une manière «plus véritable de philosophe», comme dirait Newton, à savoir la mécanique quantique.

---

### 3.A.2 Première loi

Citons Newton pour la première loi :

P R E M I E R E   L O I  
*Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve , à moins que quelque force n'agisse sur lui , & ne le contraigne à changer d'état.*

*Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.*

Cette loi, telle qu'énoncée, repose sur certaines hypothèses. Premièrement, la vitesse d'un objet dépend du référentiel utilisé pour l'observer. Un objet peut se déplacer à vitesse constante dans un référentiel et être accéléré par rapport à un autre référentiel. En fait, on doit considérer la première loi comme une définition, celle d'une classe de référentiels dans lesquels elle s'applique. Un référentiel est dit *inertiel*, ou *galiléen*, si un objet ne subissant aucune influence extérieure se déplace à une vitesse constante dans ce référentiel. Un objet ne subit aucune influence extérieure, ou aucune force, s'il est infiniment éloigné des autres objets qui sont la source des forces pouvant s'exercer sur l'objet considéré. Un tel objet n'existe pas en pratique : il s'agit d'une idéalisation. Reformulons donc la première loi, aussi appelée *principe d'inertie*, ou *principe de Galilée*, de la manière suivante :

Un objet libre d'influence extérieure se meut à une vitesse constante dans un référentiel inertiel.

Nous insistons sur le fait que cette première loi n'est rien d'autre que la définition d'un référentiel inertiel.

On peut légitimement se demander s'il est possible en pratique de se trouver dans un référentiel inertiel, puisqu'aucun objet dans l'univers n'est complètement libre d'influence extérieure et qu'il est donc impossible de vérifier en pratique si un référentiel est parfaitement inertiel. Il faut ici faire preuve d'un peu d'idéalisation. La Terre est un référentiel inertiel acceptable pour la plupart des applications pratiques, même si elle tourne sur elle-même. L'effet de cette rotation se fait cependant sentir dans les phénomènes météorologiques, par l'intermédiaire de forces fictives comme la force centrifuge et la force de Coriolis (cf. chapitre 9). L'accélération causée par cette rotation est d'environ  $0,03 \text{ m/s}^2$  à la surface de la Terre, à comparer à la gravité terrestre de  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Si on désire un meilleur référentiel inertiel, on peut toujours choisir un système d'axes centrés sur la Terre, mais ne tournant pas avec elle, c'est-à-dire fixes par rapport aux étoiles. Mais comme la Terre tourne autour du Soleil, ce référentiel n'est pas parfaitement inertiel non plus. Cependant, l'accélération de la Terre autour du Soleil n'est que de  $0,006 \text{ m/s}^2$ . Enfin, on peut choisir un système d'axes centrés sur le Soleil. Mais celui-ci tourne autour du centre de notre galaxie, quoique l'accélération correspondante soit très petite (de

l'ordre de  $10^{-10} \text{ m/s}^2$ ). Ainsi, par une suite d'approximations successives, on peut concevoir un référentiel inertiel. Ce raisonnement ne peut cependant être mené sur une échelle trop vaste, car on se heurte rapidement au problème de la structure de l'Univers dans son ensemble, problème qui nécessite une conception plus subtile de ce que constitue un référentiel et auquel la relativité générale d'Einstein apporte une réponse.

### 3.A.3 Deuxième loi

Citons encore une fois Newton pour la deuxième loi :

#### II. L O I.

*Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, & se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.*

*Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.*

Le langage relativement flou de l'époque a été remplacé de nos jours par l'énoncé suivant, qui nécessite toutefois quelques explications :

La force totale sur une particule est égale à sa masse fois son accélération :  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .

On exprime souvent cette relation en fonction de la *quantité de mouvement* (ou *impulsion*<sup>2</sup>)  $\mathbf{p}$  de la particule :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3.1)$$

En dépit de la familiarité de tous avec cette loi, sa signification n'est pas aussi immédiate que ce que l'on peut croire dans les cours d'introduction à la physique :

#### Remarques :

- ◆ Qu'entend-on par *force*? La force n'est pas définie par la deuxième loi de Newton, mais par des *lois de force*, telle la loi de la gravitation universelle, qui donnent la force ressentie par un objet en fonction de la distance qui le sépare des autres objets et, dans certains cas, de sa vitesse. Il est sous-entendu dans la deuxième loi de Newton que cette influence d'un objet sur un autre qu'on appelle force prend la forme d'un vecteur.
- ◆ La force qui figure dans la deuxième loi de Newton est la *force totale* appliquée sur la particule, c'est-à-dire la *somme vectorielle* des forces provenant de tous les objets qui l'influencent. Cette quantité est aussi appelée *résultante* des forces. Il est bien évidemment possible qu'une particule ait une accélération nulle même si elle est soumise à de multiples forces, pourvu que la résultante soit nulle.
- ◆ Qu'entend-on par *masse*? On peut considérer que la deuxième loi de Newton constitue une définition de la masse d'un objet (on dit aussi *masse inertielle*). La masse est une mesure de l'*inertie* de l'objet. Plus l'objet est massif, plus il est difficile de le mettre en mouvement (i.e., plus son accélération est petite) avec une force donnée. Cette masse est aussi une mesure de la quantité de matière contenue dans l'objet.

2. Le mot *impulsion* peut avoir deux sens, selon le contexte. Il peut aussi signifier une différence de quantité de mouvement, une intégrale définie de la force sur le temps, communiquée en un temps fini à un objet.

- ♦ Qu'entend-on par accélération? Même si la notion a été clairement définie au chapitre 2 comme la dérivée deuxième de la position, il faut préciser ici ce qu'on entend par la *position* de l'objet. Si l'objet est une particule très petite, voire une particule élémentaire comme un électron, la notion ne semble pas poser de problème. Si l'objet est assez gros, où précisément se trouve la position de l'objet? Nous verrons plus bas que, pour un objet macroscopique, la position de l'objet est en fait la position de son *centre de masse*.

### 3.A.4 Troisième loi

La troisième loi de Newton est aussi connue sous le nom de loi d'*action-réaction*. Citons Newton :

#### III. LOI.

*L'action est toujours égale & opposée à la réaction ; c'est-à-dire , que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales , & dans des directions contraires.*

*L'action est toujours égale et opposée à la réaction; c'est-à-dire, que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et dans des directions contraires.*

En langage moderne, on dirait plutôt ceci :

Quand deux objets interagissent, la force  $\mathbf{F}_{21}$  produite par le premier objet sur le deuxième est l'opposée de la force  $\mathbf{F}_{12}$  produite par le deuxième sur le premier, ou  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

Cette loi est très importante pour que les forces de cohésion à l'intérieur d'un objet se balancent mutuellement. Dans le cas contraire, un objet pourrait accélérer spontanément, sans qu'aucune force extérieure à cet objet ne soit nécessaire (voir plus bas)!

Il est bien important de comprendre que la troisième loi est un énoncé sur des forces exercées par des *objets différents* et ressenties par des *objets différents*! Il est crucial, dans l'analyse de tout problème de mécanique, de distinguer les forces exercées *par* un objet des forces exercées *sur* cet objet.

La troisième loi signifie, par exemple, que la force que la Terre exerce sur une personne est égale et opposée à la force que cette personne exerce sur la Terre. Ceci peut sembler paradoxal ou non intuitif à première vue. Il ne faut cependant pas confondre force et accélération : la masse de la Terre étant énorme en comparaison de celle d'un humain, à force égale, son accélération sera minuscule en comparaison et l'effet sur son mouvement sera négligeable.

La troisième loi suppose que la force s'exerce d'un objet sur l'autre de façon instantanée (action à distance) et joue un rôle central dans la conservation de la quantité de mouvement d'un système de particules. Cependant, dans la théorie de la relativité, on ne peut accepter l'idée d'une action à distance instantanée et il faut abandonner la troisième loi dans sa forme présente. On suppose alors que les forces sont transmises par l'intermédiaire de *champs* (champ électrique, magnétique, gravitationnel, etc.) et que l'influence se propage à la vitesse de la lumière. Cependant, la quantité de mouvement y est toujours conservée, car il faut alors tenir compte de la quantité de mouvement contenue dans le champ lui-même. Ainsi, une onde électromagnétique, qui n'est qu'une oscillation des champs électrique et magnétique, peut transporter de la quantité de mouvement, de l'énergie, du moment cinétique, etc.



## B Systèmes de particules et centre de masse

Les trois lois de Newton formulées ci-haut s'appliquent au sens strict à des points matériels seulement. Or les objets de la vie courante ne sont en aucun cas des points et il est important de comprendre comment les lois de Newton peuvent être formulées pour s'appliquer à des objets macroscopiques.

Premièrement, nous ferons l'hypothèse que tout objet peut être considéré comme un ensemble de points matériels, même si cet ensemble peut contenir un nombre astronomique de points (ex.  $10^{23}$ ). Après tout, les particules élémentaires sont physiquement ponctuelles (elles n'ont aucune structure interne, par définition) et tout objet est ultimement une collection de particules élémentaires. Dorénavant, ce que nous appellerons un *système* ou un *objet* sera simplement un ensemble de particules considérées, elles, comme ponctuelles. Il est bien important de comprendre qu'un système n'occupe pas nécessairement une région bien définie et fixe de l'espace et que sa forme peut changer avec le temps. Par exemple, en appliquant les lois de la mécanique au mouvement d'une fusée, il faut inclure dans le système la fusée elle-même et le carburant qu'elle contient et qu'elle brûle à chaque instant. Dans ce cas, les gaz s'échappant des moteurs demeurent toujours dans le système, même s'ils ne sont plus contenus dans la fusée. Autrement dit, aucune particule ne peut entrer ou sortir du système étudié sans qu'on ait à modifier les règles de mécanique que nous allons énoncer.

La quantité qui tient lieu de position à un objet macroscopique est son *centre de masse*, ou *centre d'inertie*, défini comme le vecteur suivant

$$\mathbf{R}_{\text{cm}} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{r}_i$  désigne la position et  $m_i$  la masse de la  $i^{\text{ème}}$  particule du système ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).  $M_{\text{tot}}$  désigne la masse totale  $\sum_i m_i$ . Le centre de masse est donc la position moyenne des particules du système, pondérée par la masse de chaque particule.

La vitesse du centre de masse, notée  $\mathbf{V}_{\text{cm}}$ , s'obtient simplement en calculant la dérivée par rapport au temps de  $\mathbf{R}_{\text{cm}}$  :

$$\mathbf{V}_{\text{cm}} = \frac{d\mathbf{R}_{\text{cm}}}{dt} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \quad (3.3)$$

De même, l'accélération  $\mathbf{A}_{\text{cm}}$  du centre de masse est

$$\mathbf{A}_{\text{cm}} = \frac{d\mathbf{V}_{\text{cm}}}{dt} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_i m_i \mathbf{a}_i \quad (3.4)$$

Donc la quantité de mouvement (ou impulsion) totale d'un objet s'exprime comme la masse totale  $M_{\text{tot}}$  fois la vitesse du centre de masse :

$$\mathbf{P}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = M_{\text{tot}} \mathbf{V}_{\text{cm}} \quad (3.5)$$

D'autre part, si  $\mathbf{F}_i$  est la force nette exercée sur la particule  $i$ , alors la dérivée temporelle de l'impulsion totale est

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{\text{tot}} \quad (3.6)$$

où par définition  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$  est la force totale (ou résultante) exercée sur le système, c'est-à-dire la somme vectorielle de toutes les forces exercées sur chacune des particules du système. La deuxième loi de Newton s'applique donc au mouvement du centre de masse, à condition de considérer la résultante de toutes les forces appliquées :

$$M_{\text{tot}} \mathbf{A}_{\text{cm}} = \mathbf{F}_{\text{tot}} \quad (3.7)$$

Une simplification essentielle de la relation (3.7) vient du fait que, dans le calcul de la résultante  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$ , les forces internes au système ne contribuent pas : seules comptent les forces exercées par des objets externes au système. La démonstration de ce fait capital repose sur la troisième loi de Newton : en somme, les forces internes à l'objet s'annulent par paires en raison de la troisième loi. Pour démontrer cette assertion plus en détail, décomposons la force  $\mathbf{F}_i$  s'exerçant sur la particule  $i$  en une partie externe  $\mathbf{F}_i^{\text{ext.}}$ , exercée par des objets extérieurs au système, et une partie interne  $\mathbf{F}_i^{\text{int.}}$ , qui est la somme des forces exercées par toutes les autres particules du système :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{int.}} + \mathbf{F}_i^{\text{ext.}} \quad \mathbf{F}_i^{\text{int.}} = \sum_{j (j \neq i)} \mathbf{F}_{ij} \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{F}_{ij}$  est la force exercée *par* la particule  $j$  *sur* la particule  $i$  (notez l'ordre des indices). Or, la troisième loi de Newton stipule que  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . Donc, dans le calcul de la force totale  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$ , les forces internes s'annulent deux à deux :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{tot}} &= \sum_i \mathbf{F}_i \\ &= \sum_i \left\{ \sum_{j (j \neq i)} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{\text{ext.}} \right\} \\ &= \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext.}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $i \neq j$  dans la première somme signifie qu'on somme sur toutes les paires  $(i, j)$  telles que  $i \neq j$ . La première somme du membre de droite s'annule, car pour chaque paire de particules  $(i, j)$ , le terme  $\mathbf{F}_{ij}$  compense exactement le terme  $\mathbf{F}_{ji}$ . On peut donc écrire

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext.}} \quad (3.10)$$

Pour rendre ce calcul plus explicite, considérons le cas de trois particules, numérotées 1, 2 et 3. Les forces agissant sur chacune des trois particules sont

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_1^{\text{ext.}} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{F}_2^{\text{ext.}} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{F}_3 &= \mathbf{F}_3^{\text{ext.}} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} \end{aligned} \quad (3.11)$$

En faisant la somme de ces trois forces, on trouve simplement la somme des forces externes, car les forces internes s'annulent deux à deux :  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ,  $\mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31}$  et  $\mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{32}$ .

Ceci signifie que, pour connaître le mouvement du centre de masse, il n'est pas nécessaire de connaître les détails des forces internes au système, mais uniquement les forces externes. Le contraire serait étonnant et signifierait, par exemple, qu'un objet peut accélérer spontanément sans force externe, simplement parce que le bilan des forces internes est non équilibré ! En résumé, l'accélération du centre de masse est entièrement déterminée par la somme (ou résultante) des forces externes :

$M_{\text{tot}} \mathbf{A}_{\text{cm}} = \mathbf{F}_{\text{tot}}$

(forces externes seulement) (3.12)

Ce résultat est parfois appelé le théorème de la *résultante dynamique* et constitue l'équivalent de la deuxième loi de Newton pour un objet macroscopique.

L'équivalent de la première loi de Newton pour un objet macroscopique est le principe de *conservation de la quantité de mouvement* : si un système est isolé, c'est-à-dire si les seules forces en présence sont les forces mutuelles des particules du système, alors la force totale s'exerçant sur le système est nulle et la quantité de mouvement totale  $\mathbf{P}_{\text{tot}}$  du système est conservée :

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \quad (\text{système isolé}) \quad (3.13)$$

Le centre de masse du système se déplace alors à vitesse constante ( $M_{\text{tot}}$  étant constant), même si le mouvement *relatif* des différentes parties du système peut être très complexe.

Enfin, la troisième loi de Newton peut aussi s'appliquer à des objets macroscopiques : si un système 1 exerce une force totale  $\mathbf{F}_{21}$  sur un système 2, alors la force totale exercée par le système 2 sur le système 1 (c'est-à-dire par toutes les particules du système 2 sur toutes les particules du système 1) en est l'opposée :

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (3.14)$$

Cela se démontre très facilement.

La notion de centre de masse et le fait que seules les forces externes déterminent son mouvement nous permettent souvent de considérer comme ponctuels des objets qui ne sont pas des points : si un tel objet n'est pas trop grand par rapport aux distances qui le séparent des autres objets qui exercent une force sur lui, alors la force totale  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$  se calcule facilement, car les données nécessaires pour calculer chacune des contributions  $\mathbf{F}_i^{\text{ext.}}$  (c'est-à-dire les distances avec les objets externes de chacune des particules qui composent l'objet) sont à peu près toutes les mêmes. On considère alors que la 'position' de l'objet est celle de son centre de masse et que la force totale s'exerçant sur cet objet ne dépend que de la position (et peut-être de la vitesse) de son centre de masse. L'objet se comporte alors comme une particule ponctuelle en ce qui a trait à son mouvement de translation (c'est-à-dire au mouvement de son centre de masse). D'autre part, si l'objet est rigide, mais sans être nécessairement petit, et qu'une contrainte le maintient toujours dans la même orientation (aucun mouvement de rotation), alors seul un mouvement de translation de son centre de masse est possible et on peut facilement lui appliquer la relation (3.12). Nous avons en tête ici d'innombrables situations idéalisées où des blocs de matière glissent sur des plans inclinés, sont tirés par des cordes ou sont poussés par des ressorts, dans le seul but de permettre aux étudiants de se familiariser avec l'application de la formule (3.12) et, plus important, des concepts qui la précèdent.

## C Gravitation universelle

Les *Principia* de Newton comportent non seulement les lois du mouvement décrites ci-haut, mais énoncent aussi la loi de la gravitation universelle, à l'aide de laquelle Newton explique le mouvement des planètes autour du Soleil. Newton y pratique ici la méthode dite *hypothético-déductive* : il sait que les planètes adoptent des orbites elliptiques autour du Soleil et formule l'hypothèse qu'une force d'attraction décroissant comme l'inverse du carré de la distance est exercée par le Soleil sur les planètes. Il démontre ensuite que cette hypothèse suffit à expliquer les lois empiriques de Kepler sur le mouvement des planètes. Il étend ensuite son hypothèse d'attraction à tous les objets de l'univers, tant terrestres que célestes, d'où l'épithète *universelle* associée à cette force. Newton raconta plus tard dans sa vie que c'est en voyant une pomme tomber d'un arbre qu'il comprit que cette pomme était attirée par la Terre par la même cause qui garde la Lune en orbite autour de la Terre et cette dernière autour du Soleil.

### 3.C.1 Loi de la gravitation universelle

La loi de la gravitation universelle s'exprime comme suit : chaque objet exerce sur chaque autre objet une force d'attraction, proportionnelle au produit des masses  $m_1$  et  $m_2$  des deux objets, et inversement proportionnelle au carré de la distance  $r$  qui les sépare ; cette force est dirigée suivant le vecteur qui relie les deux objets. On écrit

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (3.15)$$

où :

- $\mathbf{F}_{12}$  : force exercée *sur* l'objet 1 *par* l'objet 2.
- $m_1, m_2$  : masse des objets 1 et 2.
- $r_{12}$  : distance entre les objets 1 et 2.
- $\hat{\mathbf{r}}_{12}$  : vecteur unité dirigé de l'objet 2 vers l'objet 1.
- $G$  : constante de Cavendish ( $6,6726(8) \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ).

Si  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  sont les positions des deux objets, on définit la position relative  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  et alors  $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$  et  $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{r}_{12}/r_{12}$ . On peut aussi écrire la force  $\mathbf{F}_{12}$  comme

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.16)$$

Notons que, dans ce cas, le vecteur  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  n'étant pas unitaire, on a divisé par un facteur supplémentaire de  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  pour compenser.

La loi de la gravitation universelle a été établie par Newton à la suite d'une chaîne de raisonnement assez intéressante :

1. Newton s'est aperçu, vers 1680, que la deuxième loi de Kepler (loi des aires) n'est respectée que si la force d'attraction du Soleil sur une planète est dirigée en ligne droite vers le Soleil (force centrale).
2. Newton est familier avec l'observation empirique que tous les objets terrestres subissent la même accélération vers le sol, quelle que soit leur masse, quand on fait abstraction de la résistance de l'air. Cette observation, défendue par Galilée, implique que la force gravitationnelle s'exerçant sur un objet est proportionnelle à la masse de cet objet, de sorte que l'accélération correspondante est indépendante de la masse. On peut donc écrire (en grandeur)  $F \propto m_1$ , où  $m_1$  est la masse de l'objet 1, subissant la force exercée par l'objet 2.
3. D'après la loi d'action-réaction, cette force doit être égale et opposée à la force exercée par l'objet 1 sur l'objet 2. Donc il faut que  $F = m_1 m_2 f(r)$ , où  $f(r)$  est une fonction de la distance entre les deux objets.
4. Pour trouver cette fonction  $f(r)$ , Newton applique la troisième loi de Kepler au mouvement circulaire (hypothétique) d'une planète. Cette troisième loi, découverte de manière empirique par Kepler, stipule que le rapport entre le carré de la période et le cube du rayon de l'orbite ( $T^2/r^3$ ) est le même pour toutes les planètes, ou encore  $T^2 = C r^3$ ,  $C$  étant la même constante pour toutes les planètes. Newton sait que l'accélération centripète sur un cercle est donnée par  $v^2/r$ . En substituant  $v = 2\pi r/T$  et en posant que la force centripète est égale à la force d'attraction gravitationnelle, on trouve

$$m_1 m_2 f(r) = m_1 \frac{v^2}{r} = m_1 (2\pi)^2 \frac{r}{T^2} = m_1 \frac{(2\pi)^2}{C r^2} \quad (3.17)$$

Donc la fonction  $f(r)$  est proportionnelle à  $1/r^2$  (la masse  $m_2$  est en fait contenue dans la constante  $C$ ). On écrit donc  $f(r) = G/r^2$ , où  $G$  est une constante universelle.

La constante  $G$  a été mesurée pour la première fois par Henry Cavendish à l'aide d'une balance à torsion, en 1798. Cette mesure lui a permis de calculer la masse de la Terre (et du Soleil) à partir de la valeur de  $g$  mesurée à la surface de la Terre. Encore aujourd'hui, la constante  $G$  (dite de Cavendish) est la constante physique fondamentale qui est connue avec le moins de précision.

### 3.C.2 Champ gravitationnel

La loi de la gravitation universelle obéit au *principe de superposition* : la force de gravitation agissant sur une particule et causée par plusieurs autres particules est la *somme vectorielle* des forces exercées par chacune des particules prises séparément. Dit autrement, la force de gravité newtonienne provient d'une interaction *de paires* : le fait d'ajouter une troisième particule dans le voisinage d'une paire de particules ne modifie pas la force mutuelle des particules de la paire. Soit  $N$  particules de masses  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) situées aux positions  $\mathbf{r}_i$ . La force  $\mathbf{F}$  qu'elles exercent sur une particule de masse  $m$  située au point  $\mathbf{r}$  est

$$\mathbf{F} = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (3.18)$$

On définit le *champ gravitationnel*  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  au point  $\mathbf{r}$  comme la force gravitationnelle exercée à ce point sur une masse infinitésimale<sup>3</sup>  $m$ , divisée par  $m$  :

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (3.19)$$

#### Remarques :

- ♦ Si une particule de masse  $m$  est située au point  $\mathbf{r}$ , alors la force gravitationnelle qu'elle subit est  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}(\mathbf{r})$ .
- ♦ En général, on appelle *champ* toute fonction qui dépend de la position. En particulier, un champ vectoriel est un vecteur qu'on associe à chaque point de l'espace.
- ♦ Le champ gravitationnel a les unités de l'accélération.
- ♦ Le champ gravitationnel existe même aux endroits où aucune particule n'est présente pour subir son influence.
- ♦ Les particules qui causent le champ gravitationnel sont appelées les *sources* du champ.
- ♦ Le champ gravitationnel à la surface de la Terre pointe à peu près vers le centre de la Terre et sa grandeur se situe entre  $9,78 \text{ m/s}^2$  et  $9,83 \text{ m/s}^2$  selon les endroits (plus fort aux pôles, plus faible vers l'équateur). Ces variations sont attribuables à la forme légèrement aplatie de la Terre, mais aussi à l'effet de la force centrifuge associée à la rotation de la Terre, un effet qui n'est pas strictement gravitationnel. C'est pourquoi on parle alors plutôt du *champ de pesanteur*.
- ♦ La masse qui figure dans la loi de la gravitation est parfois appelée masse gravitationnelle, mais elle coïncide avec la masse figurant dans la deuxième loi de Newton. Ceci est à la base du principe d'équivalence, discuté au chapitre 9.
- ♦ Le principe de superposition n'est pas strictement exact. D'après la théorie de la relativité générale, qui est la théorie moderne de la gravitation supplantant celle de Newton, ce principe n'est valable qu'approximativement, si les sources du champ ne sont pas trop denses, ce qui est le cas des objets astronomiques usuels (un trou noir est un exemple du contraire).

### 3.C.3 Forces fondamentales et forces macroscopiques

Les progrès de la physique sont marqués par une réduction dans le nombre des lois fondamentales et par une compréhension de phénomènes de plus en plus complexes en fonction de ces lois fondamentales. Au cours du XXe siècle, on est arrivé à une compréhension du monde microscopique basée sur l'existence de *quatre forces dites fondamentales* :

1. La force de gravité. Il s'agit de l'archétype de la force newtonienne. Les physiciens ont naturellement tenté de comprendre tous les phénomènes naturels en fonction de forces modelées sur la force de gravité. Cependant, la théorie de Newton est maintenant considérée comme un cas limite (faibles vitesses et faibles champs) de la théorie de la relativité générale d'Einstein (1915), la théorie «moderne» de la gravitation.
2. La force électromagnétique. Le XIXe siècle fut le siècle de l'électricité. Les forces impliquant des charges statiques sont décrites quantitativement depuis Coulomb (1785) et les forces exercées par des courants électriques ont été étudiées quantitativement par Ampère et Faraday. On a longtemps tenté de décrire les forces mutuelles de charges en mouvement par une loi de force précise ne dépendant que de la position et des vitesses des charges, mais on s'est aperçu que ce n'était ni pratique ni possible d'ailleurs. Les forces électromagnétiques sont donc essentiellement décrites à l'aide des concepts de champ électrique et champ magnétique.

3. Dans cette définition opérationnelle, on demande que la masse soit infinitésimale pour que son effet sur les autres masses soit négligeable.

3. La force nucléaire forte. C'est la force responsable de la cohésion des protons et neutrons dans les noyaux. Plus fondamentalement, c'est la force qui lie les quarks. La décrire dans le langage classique est malheureusement inutile, car les phénomènes impliqués se produisent à des échelles de grandeur (ou d'énergie) qui demandent une description quantique. Comme la mécanique quantique n'est pas formulée à l'aide de la notion de force, mais plutôt à l'aide du concept d'énergie, il est plus juste de parler d'*interaction* forte dans ce cas. La théorie fondamentale qui décrit cette interaction est la chromodynamique quantique.
4. La force nucléaire faible. La manifestation la plus courante de cette force est la désintégration bêta, ainsi que la réaction de fusion proton + proton dans le soleil. L'interaction faible, comme l'interaction forte, n'est pas descriptive adéquatement dans le langage newtonien. Dans le modèle standard des particules élémentaires, cette interaction est étroitement liée à l'interaction électromagnétique, mais ses effets sur des particules de basse énergie sont beaucoup plus faibles. C'est cependant grâce à cette faiblesse que le soleil ne s'est pas consumé avec la rapidité d'une bombe H et que la vie a eu le temps d'apparaître...

Un grand nombre de physiciens tentent toujours d'élaborer une théorie unifiée de toutes les forces fondamentales, mais à ce jour une telle théorie n'a pu être achevée au point d'être confirmée par l'expérience.

La force de gravité est la seule qui se manifeste de manière simple à notre échelle et c'est aussi la plus faible de toutes. Mais, parce qu'elle est strictement additive, elle prend de plus en plus d'importance à mesure que des objets petits sont assemblés pour former des objets plus grands, et elle finit par devenir la force dominante de l'Univers.

Les forces électromagnétiques sont les plus importantes à notre échelle, car elles sont à l'origine de la structure atomique, de la liaison chimique, des forces intermoléculaires, etc. Bref, les forces électromagnétiques sont à la base des *forces macroscopiques*. Cependant, vu l'imposante chaîne de complexité qui part de l'électron pour aboutir à un objet ordinaire, il est illusoire de vouloir décrire précisément les forces macroscopiques en fonction des forces électromagnétiques élémentaires. On adopte plutôt une attitude *phénoménologique*, qui permet d'étudier des problèmes impliquant des forces macroscopiques sans se soucier de leur origine précise. C'est ce qui sera fait dans le chapitre suivant.

## Problèmes

### Question 3.1

Un muletier, à qui on a expliqué la troisième loi de Newton, n'arrive pas à y croire : «si mon mulet tire ma charrette avec une force  $F$ , cela signifie que ma charette tire mon mulet avec une force égale et opposée. Comment ma charette peut-elle avancer si les deux forces se compensent exactement?» Expliquez-lui clairement d'où vient sa confusion et comment la résoudre.

### Question 3.2

On met sur une balance une cage dans laquelle un oiseau se tient sur un perchoir. Soudainement, l'oiseau se met à voler dans sa cage. La mesure de la balance change-t-elle? On refait l'expérience avec un aquarium contenant un poisson rouge. La mesure change-t-elle lorsque le poisson repose au fond de l'aquarium? Expliquez.

### Problème 3.1

Une particule de masse  $m$  est soumise à une force sinusoïdale :

$$\mathbf{F} = C \sin(\omega t) \mathbf{e}_x$$

où  $C$  est une constante.

**A** Déduisez une expression pour la position  $\mathbf{r}(t)$  de la particule en fonction du temps et en fonction de sa vitesse initiale (à  $t = 0$ )  $\mathbf{v}_0$  et de sa position initiale  $\mathbf{r}_0$ .

**B** Faites un graphique de  $x(t)$  en supposant que  $\mathbf{v}_0 = 0$  et  $\mathbf{r}_0 = 0$ .

### Problème 3.2

Deux particules de masses  $m$  et  $M$  sont en orbite circulaire l'une par rapport à l'autre en raison d'une force d'attraction mutuelle de grandeur  $F$  qui ne dépend que de la distance  $R$  qui les sépare. La fréquence angulaire de l'orbite est  $\omega$ . Démontrez que

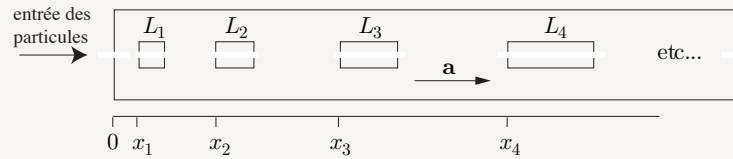
$$R = \frac{F}{\omega^2} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)$$

### Problème 3.3

Un type d'accélérateur de particules chargées fonctionne de la manière suivante : un champ électrique alternatif est appliqué dans une longue cavité et accélère les électrons qui y pénètrent par une extrémité. Comme le champ change de direction deux fois par période, il ne peut pas accélérer les particules toujours dans la même direction! Pour remédier à ce problème, on aménage des cavités plus petites à l'intérieur de la cavité principale. Le rôle de ces petites cavités est d'écranter le champ électrique quand il est dans

la mauvaise direction : lorsque les particules pénètrent dans ces petites cavités, aucune force ne s'exerce sur elles ; lorsqu'elles en ressortent, le champ électrique est de nouveau dans la bonne direction pour les accélérer (voir la figure ci-dessous). Pour que cela fonctionne, il faut placer les petites cavités aux bons endroits et leur donner la bonne longueur. Supposons qu'on place  $N$  petites cavités, de longueurs  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), aux positions  $x_i$ . Pour simplifier, supposons aussi que le champ électrique  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$  est uniforme et qu'il se retourne brusquement au bout d'une demi-période  $T$ , comme si sa dépendance temporelle était celle d'une onde carrée. Cette force donne aux particules une accélération constante  $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_x$  lorsqu'elles ne sont pas dans les cavités. À l'intérieur de la  $i^e$  cavité, la vitesse  $v_i$  des particules est constante.

Trouvez une *relation de récurrence* permettant de calculer  $x_i$ ,  $L_i$  et  $v_i$  en fonction de  $x_{i-1}$ ,  $L_{i-1}$  et  $v_{i-1}$ . Cette relation permet de déterminer les positions et longueurs de toutes les cavités, en supposant que les particules ont une vitesse pratiquement nulle quand elles pénètrent dans l'accélérateur.



### Problème 3.4

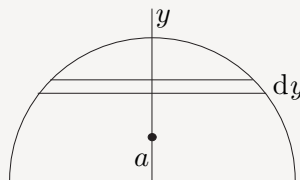
Considérez un système  $S_1$  contenant  $N_1$  particules de masses  $m_i$ , à des positions  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, \dots, N_1$ ). La masse totale de ce système est  $M_1$  et la position de son centre de masse est  $\mathbf{R}_1$ . Considérez ensuite un autre système contenant  $N_2$  particules de masses  $m_i$ , à des positions  $\mathbf{r}_i$  ( $i = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2$ ). La masse totale de ce système est  $M_2$  et la position de son centre de masse est  $\mathbf{R}_2$ . Démontrez que le centre de masse du système total  $S_1 \cup S_2$  est

$$\mathbf{R}_{\text{cm}} = \frac{M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2}{M_1 + M_2}$$

Autrement dit, le centre de masse associé à l'union de deux ensembles de particules est simplement donné par le centre de masse des deux ensembles comme si chacun d'entre eux était remplacé par son propre centre de masse.

### Problème 3.5

Un objet de densité uniforme  $\rho$  a la forme d'un demi-disque de rayon  $R$  et d'épaisseur  $\varepsilon$ . Le centre de masse est évidemment situé le long de la ligne médiane, tel qu'indiqué sur la figure par le point, mais à quelle hauteur  $a$  ? Pour répondre à cette question, découpez l'objet en languettes horizontales de largeur  $dy$  et trouvez le centre de masse de l'ensemble de ces languettes.





**Problème 3.6**

Un hémisphère de rayon  $R$ , de densité homogène, est posé à plat sur le sol. Calculez la position de son centre de masse. Supposez que l'axe de l'hémisphère coïncide avec l'axe des  $z$  et que le plan sur lequel repose l'hémisphère coïncide avec le plan  $z = 0$ .

**Problème 3.7 Centre de masse d'un prisme généralisé**

Un objet de densité uniforme a la forme d'un prisme généralisé : sa section sur un plan à  $z$  constant a toujours la même forme, sauf pour sa taille qui diminue de manière linéaire en  $z$  jusqu'à une hauteur  $z = h$  où l'objet se termine par un point. Une pyramide à base carrée en est un exemple. Un cône circulaire, droit ou oblique, en est un autre. Quelle est la hauteur du centre de masse d'un tel objet, par rapport à sa base?

**Problème 3.8**

On pose un sablier sur une balance très précise. Y a-t-il une variation du poids mesuré du sablier entre le moment où le sable s'écoule et le moment où il est complètement dans la partie inférieure du sablier? Expliquez.

**Problème 3.9**

Considérez trois corps ponctuels de masses  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) situés aux sommets d'un triangle équilatéral de côté  $d$ . Les trois objets exercent les uns sur les autres une force gravitationnelle.

**A** Si on place l'origine au centre de masse (cercle blanc sur la figure), montrez que la force  $\mathbf{F}_i$  totale exercée sur l'objet no  $i$  est

$$\mathbf{F}_i = -\frac{G m_i M_{\text{tot}}}{d^3} \mathbf{r}_i$$

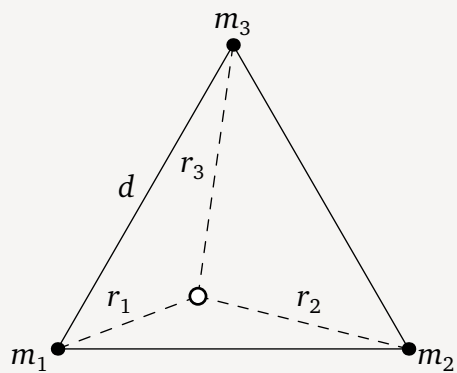
où  $\mathbf{r}_i$  est le vecteur position de l'objet no  $i$  et  $M_{\text{tot}} = m_1 + m_2 + m_3$  est la masse totale des trois objets.

**B** Montrez que, dans ces conditions, il est concevable que les trois objets suivent une trajectoire circulaire, tout en gardant intact le triangle qu'ils forment. Exprimez la fréquence angulaire  $\omega$  de ce mouvement circulaire en fonction de  $M_{\text{tot}}$ ,  $G$  et  $d$  seulement.

**C** Où intervient le fait que les trois objets doivent être placés aux sommets d'un triangle équilatéral? Pourrait-on avoir un phénomène similaire avec quatre objets situés aux sommets d'un carré?

**D** Selon vous, peut-on répéter l'exercice en considérant non pas un triangle équilatéral, mais quatre objets situés aux sommets d'un tétraèdre? Une solution où les quatre objets sont en orbite circulaire est-elle

possible dans ce cas?



## CHAPITRE 4

# APPLICATIONS ÉLÉMENTAIRES DES LOIS DU MOUVEMENT

### A Déterminisme classique

#### 4.A.1 Équations du mouvement

Considérons un objet, qu'on peut en pratique considérer comme ponctuel, se déplaçant sous l'influence de forces exercées par d'autres objets. Supposons que les forces ressenties par cet objet ne dépendent que de la position et de la vitesse de l'objet, et peut-être du temps de manière explicite. Cette hypothèse nous évite d'avoir à considérer simultanément le mouvement des autres objets qui exercent des forces sur l'objet qui nous intéresse. La deuxième loi de Newton prend alors la forme

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (4.1)$$

ou, si on l'exprime en composantes,

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m \ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m \ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Il s'agit donc d'un système de trois *équations différentielles* couplées (on suppose que l'on connaît explicitement les trois fonctions  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$ ). Ces équations différentielles sont appelées *équations du mouvement*.

#### Remarques :

- ♦ On a supposé ici que la force dépend de la vitesse de la particule comme de sa position. La dépendance en la vitesse peut survenir notamment dans le cas d'un champ magnétique, d'une force de Coriolis (cf. chapitre 9) ou de la résistance de l'air ou d'un autre milieu.
- ♦ Les équations du mouvement (4.2) sont du deuxième ordre en dérivées. Cela signifie que leur résolution demande que l'on spécifie des *conditions initiales* suffisantes, en l'occurrence la position initiale et la vitesse initiale de la particule. Une fois ces quantités spécifiées, l'avenir de cette particule est tout tracé, car la solution aux équations (4.2) est alors entièrement déterminée, comme le stipule le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles.<sup>1</sup> C'est la manifestation la plus simple du *déterminisme classique*.

1. Les conditions d'application de ce théorème sont en pratique toujours réunies dans les situations physiques, car le contraire impliquerait des forces infinies.

- ◆ Le fait que la solution des équations (4.2) existe ne veut pas dire qu'elle puisse être exprimée analytiquement. En fait, le nombre de problèmes ayant une solution analytique complète, c'est-à-dire une expression explicite de la fonction  $\mathbf{r}(t)$ , est très petit. Même le problème de Kepler, celui du mouvement d'une particule dans un champ de gravité en  $1/r^2$ , n'admet pas de solution explicite pour la position en fonction du temps. Cependant, il est en général simple de résoudre ces équations si diverses contraintes (mécaniques ou autre) font qu'une seule coordonnée varie dans le temps. Le problème est alors effectivement unidimensionnel.
- ◆ L'absence de solution analytique n'empêche pas le calcul numérique de la solution des équations (4.2). Pour une seule particule (ou un petit nombre de particules), ce problème est numériquement simple, sauf que la précision des solutions obtenues se dégrade progressivement au cours du temps. La contemplation des solutions numériques a non seulement l'avantage de favoriser l'intuition du problème, mais permet aussi de poser des diagnostics sur la nature chaotique ou non du mouvement.

Une conséquence extrême du déterminisme classique fut tirée par Pierre Simon de Laplace à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle : si un être d'une intelligence infinie (ci-après nommé le *démon de Laplace*) connaissait avec précision les positions et les vitesses de toutes les particules de l'Univers, incluant bien sûr celles dont sont constitués les cerveaux de tous les humains, cet être pourrait en principe calculer la position et les vitesses des mêmes particules à des temps ultérieurs arbitrairement éloignés, ce qui implique que l'avenir de l'Univers, dans ses moindres détails (les actions de chaque individu, etc.), est déterminé à l'avance. Ce déterminisme radical est bien sûr en contradiction avec le sentiment de libre arbitre que chacun ressent, mais est accepté par plusieurs comme allant de soi. Les travaux plus récents sur le chaos ont apporté la nuance que les conditions initiales doivent être connues avec une précision infinie pour que les prédictions classiques soient applicables à des temps éloignés. Comme une précision infinie implique des distances extrêmement petites, elle est impossible à réaliser dans le cadre de la physique classique et nous amène dans celui de la physique quantique. Dès lors, la notion de déterminisme est beaucoup plus subtile, car la mécanique quantique fait intervenir la notion d'observateur ou d'appareil de mesure et l'application de ces notions à l'Univers considéré comme un tout semble à première vue problématique. Donc le déterminisme radical est une position envisageable philosophiquement, mais difficile à défendre physiquement.

#### 4.A.2 Solution numérique des équations du mouvement

Expliquons comment les équations du mouvement peuvent être résolues par une méthode numérique simple. Adoptons la notation suivante :  $x_a$  représente la coordonnée  $a$  de la particule ( $a = 1, 2, 3$  pour  $x$ ,  $y$  et  $z$ ) et  $v_a$  la composante  $a$  de la vitesse. Les équations du mouvement pour une seule particule peuvent donc s'écrire comme

$$\begin{aligned}\dot{x}_a &= v_a \\ \dot{v}_a &= \frac{1}{m} F_a(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, t)\end{aligned}\tag{4.3}$$

Sous cette forme, les équations du mouvement forment un système de six équations du premier ordre, au lieu d'un système de trois équations du deuxième ordre. Il est toujours possible de récrire un système d'équations différentielles d'ordre supérieur en un système du premier ordre comportant plus d'équations.

Supposons maintenant que nous connaissons les valeurs initiales des coordonnées et de la vitesse :  $x_a^0$  et  $v_a^0$ . En première approximation, nous pouvons utiliser un développement de Taylor limité au premier ordre pour trouver la valeur de  $x_a$  et  $v_a$  à un temps  $t = \varepsilon$  petit :

$$\begin{aligned}x_a(\varepsilon) &\approx x_a(0) + \varepsilon \dot{x}_a(0) = x_a^0 + \varepsilon v_a^0 \\ v_a(\varepsilon) &\approx v_a(0) + \varepsilon \dot{v}_a(0) = v_a^0 + \frac{\varepsilon}{m} F_a(x_1^0, x_2^0, x_3^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, 0)\end{aligned}\tag{4.4}$$

Cette approximation est d'autant meilleure que  $\varepsilon$  est petit. Disposant maintenant d'une valeur de  $x_a$  et  $v_a$  au temps  $t = \varepsilon$ , on répète le processus pour obtenir des valeurs approximatives à  $t = 2\varepsilon$ , et ainsi de suite, en

utilisant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}x_a(t + \varepsilon) &\approx x_a(t) + \varepsilon \dot{x}_a(t) = x_a(t) + \varepsilon v_a(t) \\v_a(t + \varepsilon) &\approx v_a(t) + \varepsilon \dot{v}_a(t) = v_a(t) + \frac{\varepsilon}{m} F_a(x_1(t), x_2(t), x_3(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t), t)\end{aligned}\quad (4.5)$$

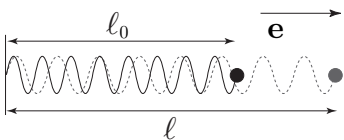
On obtient ainsi une suite de valeurs de  $x_a$  et  $v_a$  qui représente approximativement la solution exacte. Cette procédure porte le nom de *méthode d'Euler*. Son avantage tient à sa simplicité et au fait qu'elle nous permet de comprendre simplement le théorème d'unicité des solutions. En effet, la méthode devient exacte dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  et il en ressort clairement que la solution est déterminée de manière unique, pourvu que les six valeurs initiales  $x_a^0$  et  $v_a^0$  soient spécifiées.

Le désavantage de la méthode d'Euler est son manque de précision en pratique. On lui préfère la méthode dite de *Runge-Kutta*, qui évalue les dérivées à des temps intermédiaires. En particulier, la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre est couramment utilisée, et donne de surcroît une estimation de l'erreur commise à chaque étape. En plus, on peut adapter la valeur du pas temporel  $\varepsilon$  au besoin : le diminuer lorsque l'estimation de l'erreur augmente, et vice-versa. C'est cette méthode (Runge-Kutta du quatrième ordre à pas adaptatif) qui est utilisée dans les simulations java présentées dans ce cours.<sup>2</sup>

## B Forces élastiques ou de cohésion

### 4.B.1 Loi de Hooke

Les objets solides légèrement déformés par une action extérieure exercent une force de réaction sur l'agent qui les déforme. En première approximation, la force de réaction est proportionnelle à la déformation imposée. L'exemple le plus courant est celui d'un ressort en spirale dont la longueur d'équilibre est  $\ell_0$ . Si ce ressort est comprimé d'une longueur  $\Delta\ell$ , il exerce une force proportionnelle à  $\Delta\ell$  (en première approximation) dans la direction contraire à la compression; de même, s'il est étiré d'une longueur  $\Delta\ell$ , il exerce la même force, mais dans la direction opposée. Si  $\mathbf{e}$  désigne le vecteur unité dans la direction du ressort (à partir de son point d'attache) et  $\ell$  est la longueur du ressort après déformation, la force exercée par le ressort est

$$\mathbf{F} = -k(\ell - \ell_0)\mathbf{e}$$

(4.6)

La dépendance linéaire de la force dans la déformation est appelée *loi de Hooke*. La constante  $k$  est simplement appelée «constante élastique» ou «constante du ressort».

Remarquons cependant que la valeur de  $k$  ne dépend pas que de la composition du ressort, mais aussi de sa longueur! En effet, si un ressort de constante  $k$  est coupé en deux parties égales, chacune des deux parties aura une constante élastique deux fois plus grande. Pour voir ceci, imaginons justement qu'un ressort comprimé d'une longueur  $\Delta\ell$  est en fait la juxtaposition de deux ressorts identiques, chacun comprimé d'une longueur  $\frac{1}{2}\Delta\ell$ . Comme chacun des ressorts exerce à l'une ou l'autre de ses extrémités la même force que le ressort original (qui peut dire, à l'extrémité du deuxième ressort, si la force qu'il exerce est la sienne propre ou celle du ressort entier? la distinction n'a pas de sens), la constante  $k'$  du demi-ressort est donc telle que

$$k\Delta\ell = k'(\frac{1}{2}\Delta\ell) \implies k' = 2k \quad (4.7)$$

2. <http://www.physique.usherbrooke.ca/senechal/simulations/index.html>

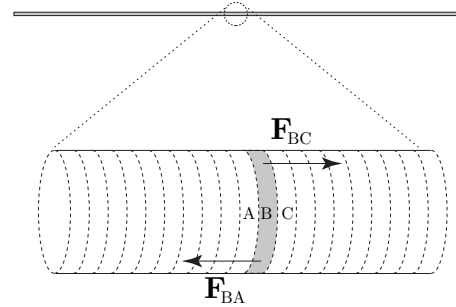
Bref, la constante de ressort  $k$  est en fait inversement proportionnelle à la longueur d'équilibre du ressort, la constante de proportionnalité  $B$  étant maintenant une caractéristique propre du matériau dont est fait le ressort et de la façon dont le ressort est enroulé :

$$k = \frac{B}{\ell_0} \quad (4.8)$$

#### 4.B.2 Force de contrainte

Lorsqu'un objet est contraint de se mouvoir le long d'une surface, le long d'un fil, etc., une force mécanique est nécessaire pour imposer cette contrainte. Cette force est souvent appelée *force normale*, parce qu'elle est dirigée dans la direction perpendiculaire au mouvement permis à l'objet. Par exemple, un objet contraint de se mouvoir sur un plan horizontal subit une force exercée par ce plan et opposée à la force de gravité qui le tire vers les bas. Physiquement, cette force normale est la somme des forces exercées par les molécules du plan sur les molécules de l'objet à l'interface. La grandeur de cette force s'ajuste en conséquence de la somme des forces qui lui sont opposées, de manière à ce qu'aucun mouvement ne soit possible dans la direction perpendiculaire au plan, vers l'intérieur de celui-ci. On peut considérer une telle force de contrainte comme une force élastique de constante  $k$  extrêmement élevée, de sorte qu'une très grande force peut être exercée sans qu'une déformation ne soit perceptible. À moins d'avis contraire, on supposera dans ces notes qu'il n'y a pas de *force d'adhésion* qui pourrait empêcher que l'objet perde contact avec le plan, s'il est tiré vers le haut.

**FIGURE 4.1**  
Décomposition d'une corde ou d'une tige en éléments.



#### 4.B.3 Force d'étirement ou tension

On rencontre souvent en mécanique des situations où une force est «transmise» par l'intermédiaire d'une corde ou d'un fil. L'origine physique de cette force est bien sûr la cohésion intermoléculaire et intramoléculaire des fibres qui forment la corde. La notion de *tension* peut facilement être l'objet de confusion et requiert une définition claire. Considérons la figure 4.1, qui illustre une corde qu'on imagine divisée en secteurs, telle un saucisson finement tranché. Chaque tranche peut être considérée comme un objet ponctuel et subit une force de la part de chacune des deux tranches voisines. La tranche  $B$  subit ainsi une force  $F_{BA}$  exercée par la tranche  $A$  et une force  $F_{BC}$  exercée par la tranche  $C$ . Si la corde est en état de mouvement uniforme ou au repos, ces deux forces sont égales et opposées et se compensent exactement. Leur grandeur est ce qu'on appelle la *tension*  $T$  de la corde. Bref, la tension d'une corde est la force que chaque segment exerce sur son voisin et, par répercussion, la force que l'extrémité de la corde exerce sur l'objet auquel elle est attachée.

Supposons maintenant que la corde est en accélération  $a$  (positive vers la droite). Soit  $\lambda$  la densité de la corde (la masse par unité de longueur) et  $dx$  la largeur de chaque tranche. Dans ce cas, la deuxième loi de Newton appliquée au segment  $B$  donne

$$F_{BC} - F_{BA} = \lambda dx a \quad (4.9)$$

Il est clair dans ce cas que la tension varie d'un point à l'autre de la corde. Soit  $T(x)$  la tension au point  $x$  le long de la corde. Le membre de gauche de l'équation ci-haut n'est autre que  $T(x + dx) - T(x)$ , ou encore  $T'(x)dx$ , où  $T'(x)$  est la dérivée de la fonction  $T(x)$ . On obtient donc l'équation

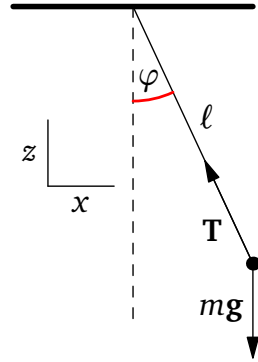
$$T'(x) = \lambda a \quad \text{et donc} \quad T(x) = T(0) + \lambda a x \quad (4.10)$$

Si  $L$  est la longueur de la corde, la différence de tension entre les deux extrémités est donc  $\Delta T = \lambda a L$ . Si la densité de la corde est très petite, on peut donc négliger cette différence de tension et dans ce cas la corde «transmet la tension» de manière intégrale d'une extrémité à l'autre, même s'il y a accélération.

#### 4.B.4 Pendule simple

Considérons un pendule simple, tel qu'illustré à la figure 4.2. Supposons que la tige du pendule est rigide, a une longueur  $\ell$  et une masse négligeable, alors que la masse du pendule lui-même est  $m$ . Les forces en présence sur le pendule sont la force gravitationnelle  $mg$  et la tension  $T$  de la tige, dirigée le long de la tige (cette tension dépend évidemment de l'angle que fait la tige avec la verticale et donc dépend du temps). Nous supposons que le pendule est contraint (par les conditions initiales) de se déplacer dans le plan  $xz$  indiqué. L'angle  $\varphi$  mesure la déviation par rapport à la verticale et est positif tel qu'indiqué.

FIGURE 4.2  
Pendule simple



La deuxième loi de Newton, exprimée dans ses composantes en  $x$  et en  $z$ , prend la forme suivante :

$$m\ddot{z} = T \cos \varphi - mg \quad m\ddot{x} = -T \sin \varphi \quad (4.11)$$

Les coordonnées  $x$  et  $z$  du pendule ne sont cependant pas indépendantes, car la longueur de la tige est fixe. Utilisons plutôt l'angle  $\varphi$  comme variable et tentons d'obtenir une seule équation différentielle pour  $\varphi$ . Notons à cette fin que, si l'origine est au point d'attache du pendule,

$$\begin{aligned} x &= \ell \sin \varphi & \dot{x} &= \ell \cos \varphi \dot{\varphi} & \ddot{x} &= \ell \cos \varphi \ddot{\varphi} - \ell \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \\ z &= -\ell \cos \varphi & \dot{z} &= \ell \sin \varphi \dot{\varphi} & \ddot{z} &= \ell \sin \varphi \ddot{\varphi} + \ell \cos \varphi \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

L'équation du mouvement peut donc s'écrire comme

$$\begin{aligned} \ell \sin \varphi \ddot{\varphi} + \ell \cos \varphi \dot{\varphi}^2 &= \frac{T}{m} \cos \varphi - g \\ \ell \cos \varphi \ddot{\varphi} - \ell \sin \varphi \dot{\varphi}^2 &= -\frac{T}{m} \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.13)$$

Éliminons la tension  $T$  de ces équations en multipliant la première par  $\sin \varphi$ , la deuxième par  $\cos \varphi$  et en sommant les deux. On obtient ainsi une équation différentielle unique pour  $\varphi$  :

$$\boxed{\ell \ddot{\varphi} = -g \sin \varphi} \quad (4.14)$$

Cette équation peut se récrire comme suit :

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0 \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (4.15)$$

### Approximation des petits angles

Au lieu de s'attaquer directement à l'éq. (4.15), faisons l'approximation que le pendule ne s'écarte jamais beaucoup de la verticale, de sorte que l'angle  $\varphi$  (en radians) est suffisamment petit pour faire l'approximation  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Dans ce cas, l'éq. (4.15) devient

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \quad (4.16)$$

Cette équation différentielle linéaire du second ordre possède comme solution générale une fonction circulaire :

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \xi) \quad (4.17)$$

où les constantes  $\xi$  et  $A$  sont déterminés par les conditions initiales. Cette solution peut aussi s'écrire

$$\varphi(t) = B \sin \omega t + C \cos \omega t \quad (4.18)$$

où  $B = A \cos \xi$  et  $C = A \sin \xi$ . En supposant que  $\varphi(0) = 0$  et en notant  $\varphi_0$  la valeur maximale de  $\varphi$  (l'amplitude de l'oscillation), alors la solution recherchée est

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin \omega t \quad (4.19)$$

Cette solution décrit une oscillation harmonique (c'est-à-dire sinusoïdale) du pendule, avec une fréquence angulaire  $\omega$ , correspondant à une période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (4.20)$$

La période d'oscillation du pendule est donc indépendante de l'amplitude  $\varphi_0$  de l'oscillation, comme l'a remarqué en premier Galilée au début du XVII<sup>e</sup> siècle.

### Période pour des amplitudes arbitraires

La période d'oscillation d'un pendule simple n'est indépendante de l'amplitude que si l'amplitude est suffisamment petite. Lorsque l'amplitude augmente, la période s'allonge progressivement. Remarquons par exemple que si le pendule est placé à la verticale, sur sa tige ( $\varphi = \pi$ ), il ne retombe que si sa vitesse est non nulle par suite d'une légère perturbation (on dit qu'il est en équilibre instable dans cette position). Donc la période associée à l'amplitude  $\varphi_0 = \pi$  est infinie. On présume que la période  $T(\varphi_0)$  est une fonction de l'amplitude  $\varphi_0$  qui vaut  $T_0 = 2\pi/\omega$  quand  $\varphi_0 \rightarrow 0$  (la période pour les petites oscillations) et augmente ensuite avec  $\varphi_0$  pour tendre vers l'infini quand  $\varphi_0 \rightarrow \pi$ .

Dans le but de calculer  $T(\varphi_0)$ , retournons à l'éq. (4.15) et ne procédons pas à l'approximation des petits angles. Elle peut se résoudre de la manière suivante. Premièrement, multiplions chaque membre de l'équation par  $\dot{\varphi}$  :

$$\dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \omega^2 \dot{\varphi} \sin \varphi = 0 \quad (4.21)$$

Le premier terme n'est autre que  $\frac{1}{2} d(\dot{\varphi}^2)/dt$  et le second  $-d(\cos \varphi)/dt$  (nous avons employé ici la méthode du facteur intégrant). Donc

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi \right\} = 0 \quad (4.22)$$

Ceci signifie que l'expression entre accolades est une constante; cette constante peut être fixée en se reportant au moment où le pendule rebrousse chemin, à un angle  $\varphi_0$  (l'amplitude de l'oscillation) :

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = \omega^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \quad (4.23)$$



On peut également écrire cette relation ainsi :

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} \quad (4.24)$$

d'où l'intégration immédiate :

$$t = \frac{1}{\omega} \int_0^\varphi \frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos \varphi_0)}} \quad (4.25)$$

(on a supposé ici que le pendule est à la verticale ( $\varphi = 0$ ) à  $t = 0$ ). Remarquons que la méthode du facteur intégrant est en fait strictement équivalente à l'utilisation de la conservation de l'énergie, étudiée au chapitre 5.

En particulier, le temps requis par le pendule pour atteindre sa hauteur maximale (le quart de la période  $T$ ) est obtenu en posant  $\varphi = \varphi_0$ , ce qui mène à la période suivante :

$$T = T_0 \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos \varphi_0)}} \quad \left( T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \right) \quad (4.26)$$

L'intégrale du membre de droite ne peut s'exprimer par des fonctions élémentaires. Par contre, elle s'exprime par une fonction spéciale appelée *intégrale elliptique complète du premier type* et notée  $K(m)$  :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} K(\sin^2(\varphi_0/2)) \quad (4.27)$$

où la fonction  $K(m)$  est habituellement définie par la relation

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - m \sin^2 z}} \quad (4.28)$$

On montre que la période admet le développement en série suivant en fonction de l'amplitude  $\varphi_0$  :

$$T = T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \frac{11}{3072} \varphi_0^4 + \frac{173}{737280} \varphi_0^6 + \frac{22931}{1321205760} \varphi_0^8 + \dots \right\} \quad (4.29)$$

Le premier terme de cette série correspond bien sûr au cas du pendule harmonique décrit plus haut. Les termes supérieurs nous permettent de calculer les corrections à apporter à la période quand l'amplitude n'est plus petite.

Démontrons, pour compléter l'argument, comment on passe de l'éq. (4.26) à l'éq. (4.27). Comme  $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$ , l'intégrale peut se récrire ainsi :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{du}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(u/2)}} \quad (4.30)$$

On procède ensuite au changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{\sin u/2}{\sin \varphi_0/2} \\ du &= \frac{2 \sin(\varphi_0/2)}{\cos(u/2)} \cos z dz = \frac{2 \sin(\varphi_0/2)}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_0/2) \sin^2 z}} \cos z dz \end{aligned} \quad (4.31)$$

$u = 0$  correspond à  $z = 0$  et  $u = \varphi_0$  à  $z = \pi/2$ . Donc

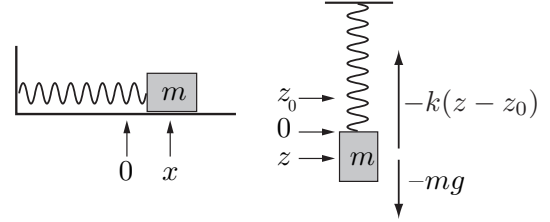
$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2)[1 - \sin^2 z]}} \frac{2 \sin(\varphi_0/2)}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_0/2) \sin^2 z}} \cos z dz \quad (4.32)$$

ce qui se simplifie en

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - m \sin^2 z}} \quad (4.33)$$

ce qui démontre l'éq. (4.27).

**FIGURE 4.3**  
Système masse-ressort (horizontal et vertical).



### Analogie avec un système masse-ressort

Le mouvement du pendule dans l'approximation des petits angles est analogue à celui d'une masse attachée à un ressort qui suit la loi de Hooke. Supposons en effet qu'un tel ressort soit fixé à un mur et que la masse puisse glisser sans frottement sur une surface horizontale, de sorte que la seule force agissant sur la masse est la force de rappel du ressort. Plaçons l'origine à la position d'équilibre du ressort, de sorte que la force exercée par le ressort sur la masse lorsqu'elle est située à une position  $x$  soit  $-kx$  (le problème et la notation sont unidimensionnels et un signe négatif signifie ici que la force est dirigée vers la gauche si  $x$  est positif et vice-versa). La deuxième loi de Newton (l'équation du mouvement) est ici

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.34)$$

L'équation (et sa solution) est la même que dans le problème du pendule dans l'approximation des petits angles. Donc la solution générale est encore

$$x(t) = A \sin(\omega t + \xi) \quad (4.35)$$

Le problème est à peine différent si le ressort est suspendu au plafond et que la masse est en mouvement d'oscillation verticale, sous l'influence combinée du ressort et de la gravité. Dans ce cas, il est pratique de placer l'origine des coordonnées à la position d'équilibre de la masse, c'est-à-dire à l'endroit où la force de rappel du ressort compense exactement la force de gravité exercée sur la masse. Si  $z_0$  désigne la position à l'équilibre du ressort en l'absence de gravité, la force exercée par le ressort à la nouvelle position d'équilibre (en présence de gravité) est  $kz_0 = mg$  (cette force est positive, car dirigée vers le haut). La force totale ressentie par la masse à une position  $z$  quelconque est  $F = -k(z - z_0) - mg = -kz$ , car  $kz_0 - mg = 0$ . L'équation du mouvement est alors  $m\ddot{z} = -kz$ , la même qu'on aurait en l'absence de gravité, mais avec une position d'équilibre située à l'origine.

## C Pression et principe d'Archimède

Un *fluide* est par définition un état de la matière dans lequel les molécules ne sont pas liées rigidement à leurs voisines et peuvent se déplacer par rapport à ces dernières. Dans un *gaz*, les molécules sont très éloignées les unes des autres et n'interagissent que rarement entre elles, lors de collisions. Dans un *liquide*, au contraire, les molécules sont très rapprochées et en interaction constante.

Il n'est pas réaliste de prétendre étudier le mouvement détaillé de chaque molécule d'un fluide, car ce problème est trop complexe et sa résolution n'apporterait probablement pas d'information utile. On s'intéresse plutôt au mouvement *moyen* de parcelles mésoscopiques du fluide qu'on appelle *éléments*. Un élément de

fluide peut avoir seulement  $10^{-8}\text{m}$  de côté et pourtant contenir des milliers de molécules ; c'est le mouvement de ces éléments qui est l'objet de la *mécanique des fluides*.<sup>3</sup>

On peut caractériser un fluide par sa *densité*  $\rho(\mathbf{r})$ , qui est la masse de fluide par unité de volume et qui peut généralement dépendre de la position, par la vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  de l'élément de fluide à la position  $\mathbf{r}$  et par la *pression*  $P(\mathbf{r})$ , qui est la force par unité de surface exercée sur un élément de fluide à la position  $\mathbf{r}$  par le fluide environnant. Dans un fluide, cette force est la même dans toutes les directions. Un fluide est dit *statique* (ou *en équilibre*) quand ses éléments sont au repos, c'est-à-dire si  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv 0$ .

Un fluide est qualifié d'*incompressible* si sa densité est pratiquement indépendante de la pression. L'eau liquide est un exemple de fluide incompressible. Au contraire, l'air est un fluide *compressible*, car sa densité est approximativement proportionnelle à la pression, à température constante.

#### 4.C.1 Variation de la pression en fonction de la hauteur

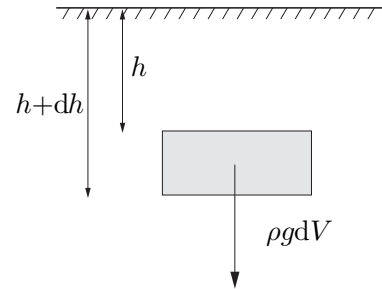
La pression d'un fluide est fonction de divers facteurs, principalement de la position du fluide dans le champ de gravité, de la température et de la vitesse du fluide. Voyons comment la pression à l'intérieur d'une masse d'eau (par exemple un lac, la mer, etc.) ou d'une masse d'air dépend de la profondeur. Considérons pour cela un élément de fluide d'épaisseur  $dh$  et de surface horizontale  $dA$  à une profondeur  $h$  au-dessous de la surface (cf. Fig. 4.4). Le volume de cet élément est  $dV = dh \times dA$  et donc la force de gravité agissant sur lui est  $-dm \mathbf{g}_z = -\rho g dh dA \mathbf{e}_z$ . La force exercée par la pression du fluide sur la face supérieure de l'élément est  $-P(h)dA \mathbf{e}_z$ , alors que celle exercée sur la face inférieure de l'élément est  $P(h + dh)dA \mathbf{e}_z$ . En équilibrant ces trois forces, on trouve

$$[P(h + dh) - P(h)] dA = \rho g dh dA \implies \frac{P(h + dh) - P(h)}{dh} = \rho g \quad (4.36)$$

Dans la limite  $dh \rightarrow 0$ , on trouve

$$\frac{dP}{dh} = \rho g \quad (4.37)$$

**FIGURE 4.4**  
Élément de fluide dans le champ de pesanteur.



Pour un fluide incompressible, la densité  $\rho$  est constante. On peut donc intégrer facilement cette équation :

$$P(h) = \rho g h + P(0) \quad (4.38)$$

où  $P(0)$  est la pression à la surface (pour une masse d'eau, il s'agit de la pression atmosphérique). On constate donc que la pression augmente linéairement avec la profondeur.

Appliquons maintenant cette relation à la pression atmosphérique en fonction de l'altitude. Il faut alors remplacer  $h$  par  $-z$  ( $z$  est l'altitude, mesurée dans le sens contraire de  $h$ ) et utiliser la loi des gaz parfaits pour

3. Il ne faut pas supposer qu'un élément du fluide dont on étudie le mouvement comporte toujours les mêmes molécules : celles-ci peuvent diffuser d'un élément à un autre et cette diffusion ne constitue pas un mouvement du fluide comme tel. Un élément du fluide ne constitue donc pas un système mécanique fermé à long terme, mais seulement à court terme.

exprimer la densité en fonction de la pression à une température donnée :  $P = C \rho T$ , où  $C$  est une constante qui dépend de la masse moléculaire moyenne du gaz. L'équation différentielle (4.37) devient donc

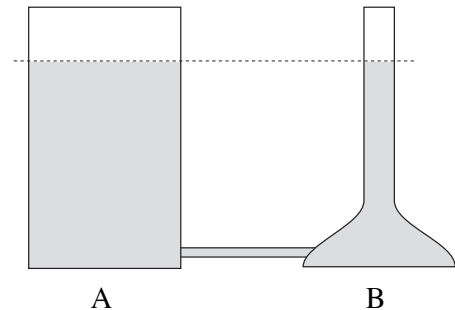
$$-\frac{dP}{dz} = \frac{Pg}{CT} \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{g dz}{CT} \quad (4.39)$$

En intégrant, on trouve

$$\ln P(z) - \ln P(0) = -\frac{gz}{CT} \Rightarrow P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{gz}{CT}\right) \quad (4.40)$$

On trouve que la pression diminue exponentiellement avec l'altitude. Bien sûr, ce résultat dépend de notre supposition que la température ne dépend pas de  $z$ , ce qui est loin d'être le cas dans l'atmosphère.

**FIGURE 4.5**  
Illustration du principe des vases communicants



### Principe des vases communicants

Ce principe élémentaire stipule que la pression ne dépend que de la profondeur, indépendamment de la forme du contenant. Par exemple, la pression hydrostatique dans une caverne sous-marine est la même que dans l'océan libre. Considérons ainsi la figure 4.5, imaginée par Simon Stevin au XVI<sup>e</sup> siècle : le contenant A est un cylindre droit, alors que le contenant B est un cylindre ayant la même dimension à sa base, mais un goulot qui devient rapidement étroit. Le principe des vases communicants stipule dans ce cas que la pression à la base des deux contenants est la même si le niveau d'eau est le même dans les deux, même si la masse totale d'eau «pesant» sur la base est différente. Si ce n'était pas le cas, le fait d'insérer un passage entre les deux contenants, tel qu'indiqué, provoquerait un mouvement de fluide du contenant A vers le contenant B et les niveaux d'eau seraient ensuite différents, ce qui est contraire à l'expérience immédiate. Plus généralement, si la pression pouvait varier en fonction de la position latérale, alors chaque élément du fluide ne serait pas en équilibre et un mouvement du fluide s'ensuivrait (nous ne serions pas en situation hydrostatique). La condition hydrostatique signifie que les seules forces en présence sont la force de pression et la force de gravité, ce qui mène inéluctablement à la conclusion que la pression ne dépend que de la profondeur du point considéré et non de la forme précise du contenant. Les choses sont différentes pour un fluide en mouvement, en particulier en présence d'une viscosité non négligeable.

### 4.C.2 Principe d'Archimède

Le principe d'Archimède stipule que *tout corps rigide immergé dans un fluide subit une force vers le haut égale au poids du liquide déplacé*. Ce principe se démontre facilement, de la manière suivante : supposons premièrement, pour simplifier les choses, que l'objet soit complètement immergé. Cet objet subit sur ses parois la pression du liquide, chaque élément de surface de l'objet subissant une force par unité de surface bien précise, la même que si l'objet était en fait remplacé par une masse équivalente de liquide. En effet, la pression du liquide se transmet parfaitement et sa valeur ne dépend que de la profondeur. La force totale exercée sur l'objet est donc la même que la force totale exercée sur le volume équivalent de liquide, lequel serait au repos s'il était substitué à l'objet. Donc cette force totale est égale en grandeur (et opposée en direction) au poids

du volume de liquide équivalent. Cet argument ne dépend pas vraiment de la nature compressible ou incompressible du fluide, sauf que si le fluide est compressible, le poids du fluide déplacé n'est pas relié de manière simple à son volume. Dans le cas où l'objet n'est que partiellement immergé, alors on doit séparer le problème en deux et traiter les parties immergées et émergées séparément, chacune subissant une poussée vers le haut respectivement égale au poids (i) du liquide et (ii) de l'air déplacé. En général, on néglige le poids de l'air déplacé ou, plutôt, on n'en tient pas compte, vu que tous les objets environnants subissent cette même poussée atmosphérique.

## D Frottement et viscosité

### 4.D.1 Coefficients de friction

La force de friction entre deux surfaces s'oppose au mouvement relatif des deux surfaces. Pour une grande variété de surfaces en contact, la force de friction suit le comportement suivant :

- Si une force extérieure tend à déplacer un objet reposant sur une surface, la force de friction oppose une force égale et opposée qui empêche tout mouvement, jusqu'à concurrence d'un maximum égal à  $\mu_s N$ , où  $N$  est la grandeur de la force normale exercée par la surface et  $\mu_s$  est le *coefficient de friction statique*.
- Une fois que l'objet est en mouvement, la force de friction s'oppose au mouvement et est égale à  $\mu_d N$ , indépendamment de la forme ou grandeur de la surface, où  $\mu_d$  est le coefficient de friction dynamique, légèrement inférieur à  $\mu_s$ .

Il faut garder à l'esprit qu'il s'agit là de règles empiriques sans validité universelle et non pas de lois fondamentales. La friction est encore un sujet relativement mal compris où se fait beaucoup de recherche. La notion de coefficient de friction est utile pour une catégorie de surfaces et de matériaux telle que la surface réelle de contact (le nombre d'atomes en contact, en quelque sorte) est proportionnelle à la force normale. Ceci se produit si la surface est suffisamment irrégulière à une échelle microscopique. Les chocs des aspérités microscopiques des deux surfaces créent des oscillations dans les objets (des ondes sonores, ou *phonons*) et là est la source de la dissipation d'énergie associée à la friction. Si les deux surfaces en contact étaient parfaites et identiques, par exemple deux surfaces de cuivre résultant d'un clivage idéal d'un cristal métallique, alors la force de frottement n'existerait tout simplement pas : les deux surfaces, une fois mises en contact, seraient parfaitement soudées. En effet, une fois mis en contact, rien n'indiquerait aux atomes de cuivre où se situait la séparation avant le contact. Un autre exemple de matériau n'obéissant pas à la 'loi' de friction  $F = \mu N$  est le caoutchouc (ou ses substituts). Ces matériaux se déforment de manière non linéaire au contact avec une autre surface. C'est pour cela qu'un pneu plus large offre une meilleure adhérence, contrairement à ce que la relation  $F = \mu_s N$  pourrait laisser croire.

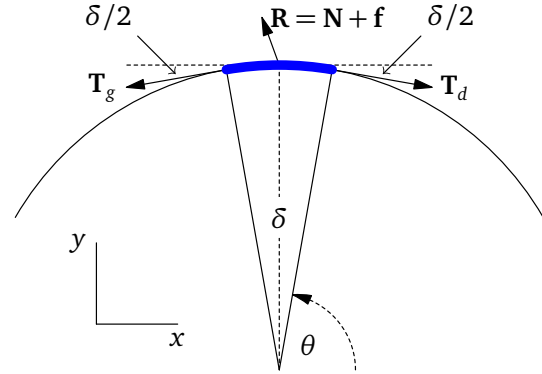
Notons enfin qu'il est artificiel de distinguer la force de friction de la force normale  $N$ , car les deux sont exercées par les mêmes objets formés des mêmes atomes ! Au total, on peut parler de la force de *réaction*  $\mathbf{R}$  d'un objet au contact d'un autre objet, cette force ayant une composante normale  $N$  et une composante longitudinale égale à la force de friction.

#### Exemple 4.1

Considérons l'enroulement d'une corde autour d'un cylindre, comme dans un cabestan (fig. 4.6). On suppose qu'un coefficient de frottement statique  $\mu$  caractérise l'interface entre la corde et le cylindre, de sorte que la surface du cylindre peut exercer une force tangentielle sur la corde. L'effet de cette force sera de faire varier la tension  $T$  de la corde en fonction de la position le long de la corde, c'est-à-dire en fonction de l'angle  $\theta$ . Le but de cet exercice est de déterminer la fonction  $T(\theta)$ . Considérons l'élément de corde indiqué par un trait épais et sous-tendant un angle  $\delta$ . Sur cet

FIGURE 4.6

Schéma des tensions agissant sur un élément de corde dans un cabestan.



élément agissent trois forces : (1) la tension  $T_d$  (de grandeur  $T(\theta)$ ) exercée par le reste de la corde à droite (2) la tension  $T_g$  (de grandeur  $T(\theta + \delta)$ ) exercée par le reste de la corde à gauche et (3) la réaction  $R$  du cylindre, qui comporte une partie  $N$  normale au cylindre et une partie  $f$ , la force de frottement proprement dite, tangentielle au cylindre. Comme la corde est au repos, ces trois forces doivent s'équilibrer :  $T_g + T_d + N + f = 0$ . De plus, on suppose que la force de frottement ne peut pas excéder une valeur maximale égale à  $\mu N$ , où  $\mu$  est le coefficient de frottement statique. Nous avons choisi notre système d'axes de telle sorte que la force normale  $N$  soit dans la direction  $y$ . D'autre part, les forces de tension sont nécessairement dans la direction de la corde et font donc un angle  $\delta/2$  avec l'axe des  $x$ . On supposera que la force de frottement agit vers la gauche, afin de combattre une tendance à la corde de glisser vers la droite, et que cette force atteint sa valeur maximale, juste avant que la corde ne commence à glisser (ce qui signifie que la personne qui retient la corde à gauche exerce une force tout juste suffisante pour l'empêcher de glisser). L'équilibre des forces selon  $x$  et  $y$  donne lieu aux équations suivantes :

$$N = [T(\theta) + T(\theta + \delta)] \sin(\delta/2) \quad \mu N + [T(\theta + \delta) - T(\theta)] \cos(\delta/2) = 0 \quad (4.41)$$

Dans l'approximation  $\delta \ll 1$ , on peut remplacer  $\sin(\delta/2)$  par  $\delta/2$  et  $\cos(\delta/2)$  par l'unité et

$$N = [T(\theta) + T(\theta + \delta)] \delta/2 \quad \mu N + T(\theta + \delta) - T(\theta) = 0 \quad (4.42)$$

On remplace ensuite  $T(\theta + \delta)$  par  $T(\theta) + T'(\theta)\delta$ , où  $T'(\theta)$  est la dérivée de la fonction  $T(\theta)$ . En négligeant  $\delta^2$ , on trouve

$$N = T(\theta)\delta \quad \mu N + T'(\theta)\delta = 0 \quad (4.43)$$

En éliminant  $N$  de ces deux équations, on trouve

$$T'(\theta) = -\mu T(\theta) \quad (4.44)$$

La solution à cette équation différentielle est une exponentielle :

$$T(\theta) = T(0)e^{-\mu\theta} \quad (4.45)$$

où  $T(0)$  est la valeur de la tension à l'angle  $\theta = 0$ . La tension diminue donc exponentiellement de droite à gauche, tant que la corde est en contact avec le cylindre.

#### 4.D.2 Force de viscosité

Lorsqu'un objet se déplace dans un fluide (gaz ou liquide), le milieu exerce généralement une force de résistance, opposée à la vitesse de l'objet. On doit distinguer ici deux types de résistance : (i) celle causée par la viscosité du milieu et (ii) celle associée à la turbulence de l'écoulement derrière l'objet en mouvement. La viscosité d'un fluide se manifeste lors de l'écoulement de ce fluide à proximité d'une surface ou d'un objet ou, ce qui est équivalent, lors du mouvement d'une surface ou d'un objet dans le fluide. La force de résistance visqueuse au mouvement d'un objet est proportionnelle à la vitesse de l'objet et est à peu près opposée à

eau (0°)	$1,792 \times 10^{-2}$	air (0°)	$1,71 \times 10^{-4}$
eau	$1,005 \times 10^{-2}$	air	$1,81 \times 10^{-4}$
eau (40°)	$0,656 \times 10^{-2}$	air (40°)	$1,90 \times 10^{-4}$
alcool (0°)	$0,367 \times 10^{-2}$	hydrogène (0°)	$0,89 \times 10^{-4}$
glycérine	8,33	ammoniac (gaz)	$0,97 \times 10^{-4}$
huile de castor	$9,86 \times 10^{-2}$	CO <sub>2</sub>	$1,46 \times 10^{-4}$

TABLE 4.1

Coefficients de viscosité de divers fluides, en poise. Un poise vaut 0,1 kg/(m.s). Tous les fluides sont à 20°C, sauf où indiqué.

celle-ci. Dans le cas d'un objet sphérique de rayon  $R$ , cette force est donnée par la *loi de Stokes* :

$$\mathbf{F}_{\text{vis.}} = -6\pi R\eta\mathbf{v} \quad (4.46)$$

où  $\eta$  est appelé *coefficient de viscosité* et varie d'un fluide à l'autre, ainsi qu'en fonction de la température et de la pression. Pour un objet non sphérique, la force de résistance n'est exactement opposée à la vitesse que si l'objet possède une symétrie de rotation autour de l'axe de la vitesse et le facteur  $6\pi R$  est alors remplacé par le coefficient approprié. Pour tous les autres objets, la force de résistance n'est qu'approximativement dans la direction opposée à  $\mathbf{v}$  et peut causer sur l'objet des mouvements de rotation, etc.

Si la vitesse de l'objet dépasse une certaine limite – qui dépend de la forme de l'objet et du milieu dans lequel il se déplace – l'écoulement du fluide autour de l'objet entre dans un régime *turbulent*, caractérisé par l'apparition de tourbillons et de volutes sur plusieurs échelles de distance.<sup>4</sup> L'apparition de ces tourbillons cause des baisses de pression derrière l'objet et cette différence de pression se manifeste par une force de résistance, dite *force de traînée*, généralement proportionnelle au carré de la vitesse de l'objet. Cette force s'oppose *grosso modo* à la vitesse de l'objet, mais elle n'est exactement opposée à la vitesse que si l'objet présente une symétrie de rotation autour de la direction de sa vitesse, comme pour la force de viscosité. Dans ce cas, la force de résistance totale (viscosité + traînée) peut s'écrire

$$\mathbf{F} = -F(v)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -F(v)\hat{\mathbf{v}} \quad (4.47)$$

où la grandeur  $F(v)$  de la force contient des termes en  $v$  et en  $v^2$ , respectivement associés à la viscosité et à la traînée :

$$F(v) = Av + Bv^2 \quad (v > 0) \quad (4.48)$$

Par exemple, pour un objet sphérique se déplaçant dans l'air (TPN), on trouve approximativement que  $A = 1,55 \times 10^{-4}D$  et  $B = 0,22D^2$ , en unités SI, où  $D$  est le diamètre de la sphère (en mètres). Pour des objets lents, le terme linéaire est plus important, alors que le terme quadratique domine pour des objets rapides. Pour un fluide visqueux (surtout des liquides) le terme linéaire est généralement le plus important.

4. La turbulence est le mécanisme par lequel l'énergie de l'écoulement d'un fluide est convertie en chaleur. L'étude de la turbulence est très complexe et constitue un champ actif de recherche, alors que l'étude de l'écoulement laminaire (c'est-à-dire sans turbulence) est un domaine classique de la physique, bien établi depuis plus de cent ans.

## E Mouvement dans un champ magnétique

Une particule électriquement chargée se déplaçant dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$  subit une force proportionnelle à sa vitesse et donnée par la formule

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (4.49)$$

(pour une révision de la notion de produit vectoriel  $\wedge$ , consulter l'annexe 11.A). L'équation du mouvement est alors simplement

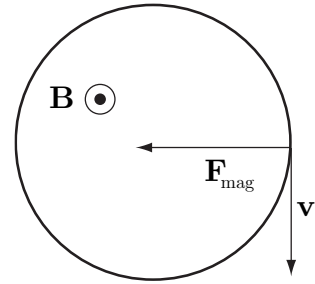
$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (4.50)$$

Comme l'accélération est perpendiculaire à la vitesse  $\mathbf{v}$ , la grandeur de cette dernière est constante :

$$\frac{d}{dt}v^2 = 2\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad (4.51)$$

Il s'agit d'une propriété générale du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique (sans champ électrique ou autre force).

**FIGURE 4.7**  
Force produite par un champ magnétique.



Supposons maintenant que le champ magnétique est uniforme :  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . On peut vérifier facilement que le mouvement circulaire uniforme est une solution de l'équation du mouvement. En effet, la force dans ce cas doit toujours être dirigée vers le centre, perpendiculaire à la vitesse en tout temps (tout comme la force magnétique) et aussi perpendiculaire au champ magnétique, si le cercle est contenu dans le plan  $xy$ . Si le champ sort de la page, alors la vitesse doit être dans la direction indiquée ci-contre si la charge est positive, de sorte que  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ . La grandeur de la force centripète est alors  $F = m\omega^2 R = qvB$ , où  $R$  est le rayon du cercle. Comme  $v = \omega R$ , on trouve  $m\omega^2 R = q\omega R B$ , ou encore  $\omega = qB/m$ . La fréquence du mouvement circulaire est donc indépendante du rayon du cercle ou de la vitesse. Pour une raison historique, on l'appelle la *fréquence cyclotron* et on la note  $\omega_c$  :

$$\omega_c \equiv \frac{qB}{m} \quad (4.52)$$

Ayant démontré que le mouvement circulaire uniforme est une solution à l'équation du mouvement, nous n'avons pas démontré qu'il s'agit de la solution générale. Pour ce faire, écrivons les composantes de l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega_c v_y \\ \dot{v}_y &= -\omega_c v_x \\ \dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

où  $\omega_c$  pour le moment n'est qu'un symbole correspondant à  $qB/m$ , sans l'interprétation d'une fréquence. De la dernière des équations (4.53) on déduit que la composante en  $z$  de la vitesse est constante. Pour



résoudre les deux premières équations, on dérive la première par rapport au temps et on y substitue la deuxième :

$$\ddot{v}_x = \omega_c \dot{v}_y = -\omega_c^2 v_x \quad (4.54)$$

La solution à cette équation différentielle nous est connue :

$$v_x(t) = A \cos(\omega_c t + \phi) \quad (4.55)$$

où  $A$  et  $\phi$  sont des constantes fixées par les conditions initiales. Notons qu'on peut adopter le cosinus comme le sinus dans la solution générale de l'équation différentielle. Une fois  $v_x$  connu,  $v_y$  se calcule par la première des équations (4.53) :

$$v_y(t) = -A \sin(\omega_c t + \phi) \quad (4.56)$$

La valeur de  $\phi$  dépend de l'origine des temps et peut en toute généralité être fixée à zéro. Quant à l'amplitude  $A$ , ce n'est rien d'autre que la grandeur de la composante de la vitesse perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  :

$$v_x^2 + v_y^2 \equiv v_\perp^2 = A^2 \quad (4.57)$$

On peut donc écrire la solution des équations (4.53) comme suit :

$$\mathbf{v}(t) = v_\perp (\mathbf{e}_x \cos \omega_c t - \mathbf{e}_y \sin \omega_c t) + v_z \mathbf{e}_z \quad (4.58)$$

où  $v_z$  est une constante.

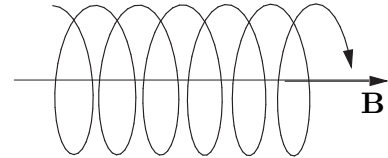
La position en fonction du temps s'obtient par simple intégration :

$$\mathbf{r}(t) = \frac{v_\perp}{\omega_c} (\mathbf{e}_x \sin \omega_c t + \mathbf{e}_y \cos \omega_c t) + v_z t \mathbf{e}_z \quad (4.59)$$

(nous avons choisi l'origine afin que la constante d'intégration soit nulle). La trajectoire décrite par cette équation, lorsqu'on la projette sur le plan  $xy$ , est un cercle de rayon  $v_\perp/\omega_c$ , centré à l'origine et décrit dans le sens horaire si  $\omega_c$  est positif, antihoraire si  $\omega_c$  est négatif (le signe de  $\omega_c$  est bien sûr déterminé par le signe du produit  $qB$ ). Dans l'espace, la trajectoire est hélicoïdale. La période de rotation dans le plan  $xy$  est  $T = 2\pi/\omega_c$  et est indépendante du rayon de l'hélice.

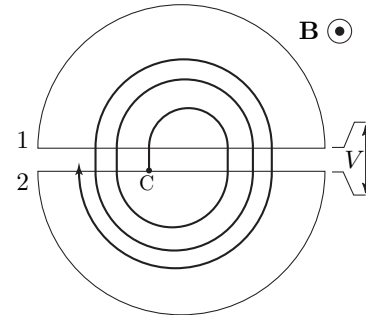
**FIGURE 4.8**

Trajectoire hélicoïdale d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}$ .



**FIGURE 4.9**

Trajectoire d'une particule chargée dans un cyclotron.

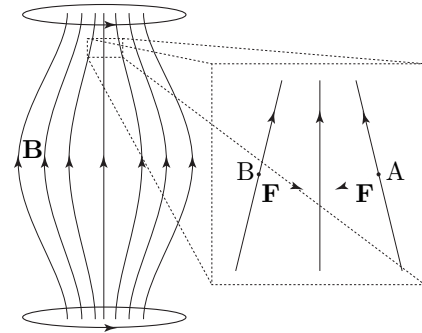


### Le cyclotron

Le mouvement circulaire (ou hélicoïdal) d'une particule chargée dans un champ magnétique est l'objet de multiples applications. Signalons particulièrement le *cyclotron*, dont le principe est illustré schématiquement sur la Fig. 4.9. Ce dispositif, inventé au début des années 1930 par le physicien américain Ernest Lawrence, vise à accélérer des particules chargées. Le principe du cyclotron original repose essentiellement sur le fait que la fréquence de révolution d'une particule chargée dans un champ magnétique est indépendante du rayon du cercle (ou de la vitesse de la particule) et ne dépend que de sa masse, de sa charge et de l'intensité du champ magnétique ( $\omega_c = qB/m$ ). Le cyclotron consiste en une chambre évacuée en forme de cylindre aplati (vu de haut sur la figure) sur laquelle on applique un champ magnétique uniforme. La chambre est divisée en deux hémisdisques (1 et 2), entre lesquels est appliquée une différence de potentiel alternative  $V$ , de fréquence  $\omega_c$ . Supposons maintenant qu'un ion positif, partant du point C, soit accéléré par cette différence de potentiel de l'hémisdisque 2 à l'hémisdisque 1. Une fois arrivé, il ne ressent que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  et suit une trajectoire semi-circulaire qui le ramène vers l'hémisdisque 2. Parce que la fréquence d'oscillation de la tension  $V$  coïncide avec la fréquence cyclotron  $\omega_c$ , l'ion revient à l'espace inter électrode juste au moment où le sens du champ électrique dans cet espace s'est inversé, ce qui accélère de nouveau l'ion, mais vers le bas cette fois. Sa vitesse étant de nouveau augmentée, le rayon de la trajectoire semi-circulaire de l'ion dans 2 est plus grand, mais le temps qu'il met à revenir à l'espace inter électrode est toujours le même et l'ion peut être de nouveau accéléré (vers le haut) quand il repasse de 2 à 1, et ainsi de suite. La trajectoire de l'ion est donc une série de demi-cercles de rayons croissants. Lorsque le rayon devient comparable au rayon du cyclotron, un dispositif supplémentaire éjecte l'ion dans une direction précise et il peut maintenant servir de projectile à une expérience de physique subatomique. L'avantage du cyclotron, par rapport aux accélérateurs électrostatiques reposant sur une simple différence de potentiel, est que la particule accélérée traverse plusieurs fois la même différence de potentiel, sans que des tensions colossales ne soient nécessaires.<sup>5</sup>

FIGURE 4.10

Configuration d'un champ magnétique permettant le confinement des particules chargées et détail (à droite) de la direction des forces magnétiques effectuant ce confinement.



### Le confinement magnétique

La force magnétique peut aussi servir à confiner des particules chargées dans un espace donné. Considérons à cet effet la figure 4.10. Le champ magnétique est produit par deux anneaux de courant situés aux extrémités supérieure et inférieure et les lignes de champ magnétique montrent un renflement au centre, ce qui indique que le champ est moins intense au centre que près des anneaux. D'autre part, une propriété fondamentale du champ magnétique est que les lignes de champ magnétique ne peuvent apparaître ou disparaître (elles sont forcément refermées sur elles-mêmes). Donc la direction du champ magnétique près des anneaux est comme indiquée sur le détail de l'encadré (à droite sur la figure). Supposons qu'une particule chargée ait un mouvement hélicoïdal vers le haut. Comme les lignes de champ sont convergentes quand la particule s'approche de l'extrémité supérieure, les forces magnétiques exercées en A et en B ont une composante dirigée vers le bas, qui tend à inverser la progression de la particule le long de l'axe du champ et à la retourner vers le

5. Signalons cependant que si la vitesse de la particule devient une fraction appréciable de la vitesse de la lumière, alors la fréquence de révolution perd son caractère constant et commence à dépendre de la vitesse. Cet effet relativiste, étudié à la section 10.F, a laissé croire aux physiciens que le cyclotron ne pourrait jamais accélérer des particules à une très grande vitesse. Or, des modifications au plan original permettent d'atteindre sans problème des vitesses comparables à celle de la lumière.

bas. À l'extrémité inférieure, l'effet contraire se produit, de sorte qu'une particule peut rester prisonnière de cet espace, pourvu que la composante verticale de sa vitesse ne soit pas trop élevée – elle pourrait alors avoir le temps de franchir l'anneau avant que la force de confinement n'ait eu le temps d'inverser sa progression. Une tel dispositif est généralement appelé *bouteille magnétique*, mais le schéma donné ici est bien sûr une caricature qui ne sert qu'à expliquer le principe de fonctionnement.

Le champ magnétique terrestre agit comme une bouteille magnétique repliée sur la Terre. Le champ magnétique est plus intense près des pôles et plus faible vis-à-vis l'équateur. De plus, les lignes de champ convergent vers les pôles, élément essentiel à l'effet de confinement. Les particules chargées en provenance du Soleil (vent solaire) peuvent alors être capturées par le champ terrestre et forment un anneau autour de la Terre. En fait, on compte deux anneaux (assez larges) de particules chargées, respectivement à 1,5 et 3,5 rayons terrestres. Ces anneaux sont appelés *ceintures de van Allen* et ont été découverts au début de l'ère spatiale à l'occasion du lancement des premiers satellites artificiels. Les aurores boréales et australes sont justement causées par des particules chargées plus énergétiques qui réussissent à s'échapper des ceintures aux extrémités de la bouteille magnétique, c'est-à-dire près des pôles, et qui ionisent ou excitent des molécules de l'atmosphère au passage. Ce sont ces molécules excitées qui émettent la lumière des aurores.

## Problèmes

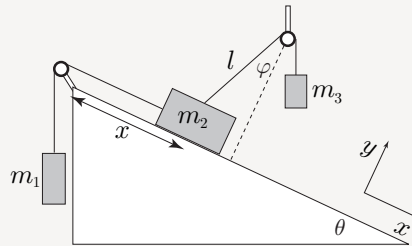
### Problème 4.1

Considérez le plan incliné illustré. Un bloc de masse  $m_2$  repose sur le plan. Il est attaché, via des fils et des poulies, à deux autres blocs de masses  $m_1$  et  $m_3$ . On supposera que les poulies et le plan n'exercent aucune friction. Le plan fait un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale. La distance  $x$  que fait le centre du bloc de masse  $m_2$  avec le haut du plan peut servir de coordonnée pour la position du bloc et on peut définir un système d'axes inclinés  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$ , tel qu'indiqué. Le plan incliné est fixe, mais les trois masses sont sous l'influence de la gravité.

**A** Dans un premier temps, la masse  $m_3$  n'est pas reliée au bloc (faites comme si elle n'existait pas). Quelles sont les forces pertinentes s'exerçant sur le bloc de masse  $m_2$ ? Exprimez l'accélération du bloc (c'est-à-dire  $\ddot{x}$ ) en fonction des paramètres du problème ( $m_1$ ,  $m_2$ ,  $g$  et  $\theta$ ). Indice : vous devez aussi considérer le mouvement de la première masse pour résoudre ce problème. À quelle condition doivent satisfaire  $m_1$ ,  $m_2$  et  $\theta$  pour que le système demeure en équilibre?

**B** Supposons maintenant que les masses  $m_1$  et  $m_2$  sont en équilibre (les conditions demandées en (a) sont respectées). On attache maintenant la troisième masse au bloc, comme indiqué sur la figure. Montrez que l'angle  $\varphi$  doit être nul pour que le système soit en équilibre. Qu'arrive-t-il s'il n'est pas nul? Quelle condition doit respecter  $m_3$  pour que le bloc reste en contact avec le plan incliné?

**C** Supposez que le système des trois masses est en équilibre ( $\varphi = 0$ ). Déplaçons légèrement le bloc le long du plan, de sorte que l'angle  $\varphi$  est non nul, mais petit (suffisamment petit pour supposer que la longueur  $\ell$  entre le bloc et la poulie reste à peu près constante). Trouvez une équation différentielle simple pour l'évolution dans le temps de l'angle  $\varphi$ . Notez que la seule variable pouvant figurer dans cette équation est  $\varphi$  (pas  $x$ ). Les paramètres figurant dans cette équation sont  $g$ ,  $\ell$  et les trois masses.



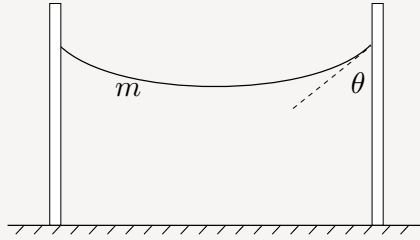
### Problème 4.2

Une corde de masse  $m$  est suspendue entre deux poteaux, comme illustré. La tangente à la corde sous-tend un angle  $\theta$  avec la verticale et les deux points de suspension sont à la même hauteur. Il est clair dans ce cas que la tension de la corde varie d'un point à un autre.

**A** Calculez la tension  $T$  de la corde à l'un des points de suspension. Exprimez votre résultat en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $\theta$ .

**B** Calculez la tension  $T_0$  de la corde exactement à mi-chemin entre les deux poteaux, c'est-à-dire à son

point le plus bas.



#### Problème 4.3

Considérons encore une fois la corde suspendue du problème précédent. Il s'agit ici de démontrer que la forme adoptée par la corde à l'équilibre décrit un cosinus hyperbolique. Pour fixer les idées, plaçons l'origine au point le plus bas de la corde (au milieu) et supposons que la corde a une densité linéaire  $\lambda$  (masse par unité de longueur) et que la tension au bas de la corde est  $T_0$ . Appelons  $y(x)$  la hauteur de la corde en fonction de la coordonnée horizontale  $x$ .

**A** Soit  $T(x)$  la tension de la corde vis-à-vis de la coordonnée  $x$  et  $\varphi(x)$  l'angle que fait la tangente à la corde par rapport à l'horizontale à cet endroit. En travaillant sur un élément de corde s'étalant entre les coordonnées  $x$  et  $x + dx$  (attention, la longueur de cet élément de corde n'est pas  $dx$  !) et en appliquant l'équilibre des forces agissant sur cet élément, démontrez que

$$T(x) = \frac{T_0}{\cos \varphi(x)} \quad \text{et que} \quad \frac{d}{dx} (T(x) \sin \varphi(x)) = \frac{\lambda g}{\cos \varphi(x)}$$

**B** Si  $y'$  représente la dérivée  $dy/dx$ , démontrez, en vous servant des résultats de (a), que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\xi} \sqrt{1 + (y')^2} \quad \text{où} \quad \xi \equiv \frac{T_0}{\lambda g}$$

**C** Résolvez cette équation différentielle et obtenez une forme explicite de  $y$  en fonction de  $x$  et de  $\xi$ .

**D** Calculez la tension  $T(x)$ .

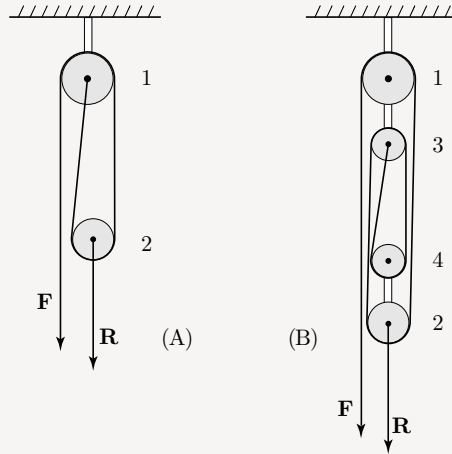
#### Problème 4.4

Considérez les systèmes de poulies illustrés. Dans les deux cas, la force **F** est celle qu'une personne doit fournir et la force **R** (la résistance) est la force exercée par la masse qu'on doit soulever, ou par une charge quelconque.

**A** En (A), la corde s'enroule autour de la poulie 1, puis de la poulie 2, pour ensuite être amarrée au centre de la poulie 1, elle-même fixée au plafond. La charge est suspendue au centre de la poulie 2. Donnez, *en la démontrant clairement*, la grandeur relative des forces **F** et **R**. Négligez (i) le frottement des poulies sur leurs essieux et de la corde sur les poulies (ii) le poids des poulies et des cordes et (iii) le fait que la dernière partie de la corde n'est pas exactement verticale.

**B** En (B), la corde s'enroule successivement autour des poulies 1, 2, 3 et 4, pour s'amarrer au centre de

la poulie 3. Les centres des poulies 1 et 3 sont solidaires, de même que ceux des poulies 2 et 4. Refaites le même exercice qu'en **a**), avec les mêmes approximations. Le dispositif (B) et ses généralisations à plus de poulies sont appelés *palans* et sont encore vendus en quincaillerie, quoiqu'ils soient moins courants que lors des beaux jours de la navigation à voile (ils sont utilisés pour lever les vergues).



#### Problème 4.5

Considérons un pendule de masse  $m$  et de longueur  $\ell$  suspendu à un pivot fixe. Contrairement au cas étudié dans la section 4.B.4, ce pendule n'est pas contraint d'osciller dans un plan, mais peut se mouvoir dans les deux directions perpendiculaires à la tige qui le suspend.

**A** Supposons que l'amplitude du mouvement du pendule est petite, c'est-à-dire que son angle d'inclinaison  $\theta$  par rapport à la verticale est petit en tout temps. Montrez que l'équation du mouvement de ce pendule est alors approximativement donnée par

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}_\perp \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

où  $\mathbf{r}_\perp$  est la projection du vecteur position sur le plan horizontal :  $\mathbf{r}_\perp = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ .

**B** Montrez que la solution générale à cette équation du mouvement est

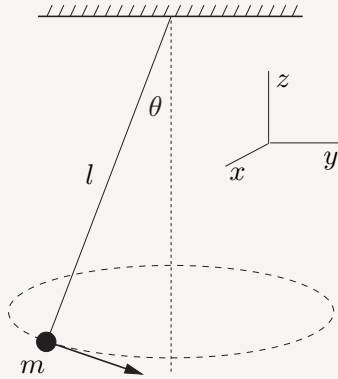
$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad y(t) = B \sin(\omega t + \beta)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

**C** Quelles sont les conditions que ces constantes doivent respecter pour que le mouvement du pendule soit (i) linéaire (c'est-à-dire que l'oscillation soit contenue dans un même plan vertical) et (ii) circulaire (c'est-à-dire que le vecteur  $\mathbf{r}_\perp(t)$  trace un cercle dans le plan  $xy$ ) ?

**D** Supposons maintenant que le pendule est en mouvement circulaire, mais que son inclinaison  $\theta$  par rapport à la verticale, quoique constante, ne soit pas nécessairement petite (cf. figure ci-dessous). Exprimez

la fréquence  $\omega$  du mouvement circulaire en fonction de  $g$ , de  $\ell$  et de  $\theta$ .



#### Problème 4.6

Nous avons montré que la période d'un pendule d'amplitude  $\varphi_0$  est donnée par la formule

$$T = T_0 \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos \varphi_0)}} \quad \left( T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \right)$$

**A** Évaluez cette intégrale dans l'approximation des petites amplitudes, c'est-à-dire en supposant que la fonction cosinus puisse être représentée par les deux premiers termes de son développement de Taylor. À cet ordre d'approximation, la période devrait être indépendante de l'amplitude.

**B** Supposons toujours que l'amplitude est petite, mais augmentons l'ordre d'approximation. Pour cela, utilisons le développement de Taylor du cosinus au quatrième ordre :

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4$$

Substituez ce développement dans la formule de la période et effectuez un développement de Taylor de l'intégrand au premier ordre. Montrez que

$$T \approx T_0 \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{24}(\varphi_0^2 + \varphi^2) \right\}$$

Indice : vous devez utiliser le développement de Taylor de la fonction  $f(\varepsilon) = 1/\sqrt{1+\varepsilon}$  autour du point  $\varepsilon = 0$ .

**C** Calculez cette intégrale et montrez qu'à cet ordre d'approximation

$$T \approx T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 \right\}$$

On voit que la période dépend maintenant de l'amplitude.

**D** Une horloge grand-père a initialement une période de 2s, un balancier de 1m de long qui se déplace de 4cm de part et d'autre de la verticale. Au bout d'une semaine, son amplitude a diminué de 10%. De ce fait, est-ce que l'horloge retarde ou avance? De combien de secondes par jour?

### Problème 4.7

Un ressort de constante élastique  $k$  porte un plateau, de sorte que la masse de l'ensemble est  $m$  et que la hauteur d'équilibre du plateau vide est  $z = 0$  (ceci inclut l'effet du poids du plateau et du ressort). On dépose ensuite sur le plateau un objet de masse  $M$  de poids  $Mg$  et on compresse le ressort jusqu'à ce que le plateau soit à une hauteur  $z_0 < 0$ . Au temps  $t = 0$ , on relâche le tout et l'ensemble plateau-objet accélère vers le haut. Dans ce problème, on néglige toute source de frottement.

**A** Quelle est la hauteur d'équilibre  $a$  du plateau avec la masse  $M$ , c'est-à-dire la valeur de  $z_0$  telle qu'aucun mouvement ne suit la relâche du plateau?

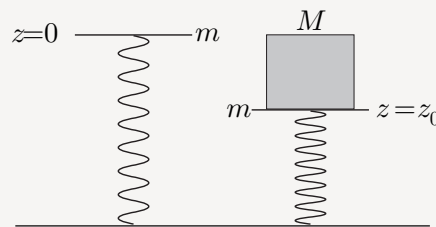
**B** Soit  $z(t)$  et  $z'(t)$  les coordonnées verticales du plateau et de la base de l'objet, respectivement. Tant que l'objet repose sur le plateau, on a  $z = z'$ , mais il est possible que l'objet perde contact avec le plateau lors de la montée du plateau, si  $|z_0|$  est suffisamment grand. Écrivez les équations différentielles du mouvement séparément pour le plateau et l'objet (c'est-à-dire pour  $\ddot{z}$  et  $\ddot{z}'$  respectivement), en tenant compte notamment de la force normale  $N$  agissant entre le plateau et l'objet.

**C** En supposant que l'objet reste en contact avec le plateau (donc que  $N > 0$ ), obtenez la valeur explicite de  $z(t) = z'(t)$ , en fonction de  $M$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $k$  et de  $z_0$ .

**D** Trouvez la valeur minimum de  $|z_0|$  au-delà de laquelle l'objet perdra contact avec le plateau à un moment donné. Trouvez aussi la coordonnée  $z_1$  à laquelle cette perte de contact se produira. Indice : la perte de contact coïncide avec l'annulation de la force normale  $N$ .

**E** La perte de contact se produisant à un temps  $t_1$ , auquel l'objet a une coordonnée  $z_1$  et une vitesse  $\dot{z}_1$ , donnez une expression mathématique pour la position  $z(t)$  du plateau et la position  $z'(t)$  de l'objet après la perte de contact. Exprimez votre résultat en fonction de  $t$ ,  $t_1$ ,  $z_1$ ,  $\dot{z}_1$ ,  $g$ ,  $m$  et  $k$ .

**F** Faites un schéma des fonctions  $z(t)$  et de  $z'(t)$  dans le cas où il y a perte de contact, en indiquant bien  $z_0$ ,  $a$ ,  $t_1$  et  $z_1$  et en indiquant ce qui se produit pour  $t > t_1$ . Un graphique précis n'est pas nécessaire, pourvu que le schéma soit qualitativement correct.



### Problème 4.8

Un bateau transporte une cargaison de blocs de béton et se retrouve dans une écluse fermée. Le capitaine est soudainement pris de panique à l'idée que son navire touche le plancher de l'écluse et ordonne qu'on jette un gros bloc de béton par-dessus bord. Son second, pris de doute, lui explique que le bloc jeté par-dessus bord va faire baisser le niveau de l'eau par rapport à l'écluse (indiqué  $h$  sur la figure) et que les choses ne feront qu'empirer. Pour démêler l'affaire, calculez la variation  $\Delta h$  du niveau de l'eau de l'écluse et la variation  $\Delta d$  de la distance entre le plancher de l'écluse et le fond du bateau. Vous avez besoin de considérer les variables suivantes :

$h$  : le niveau de l'eau sur l'écluse (distance entre le plancher et la surface d'eau).



$b$  : le niveau de flottaison du navire (distance entre le pont du navire et la surface d'eau).

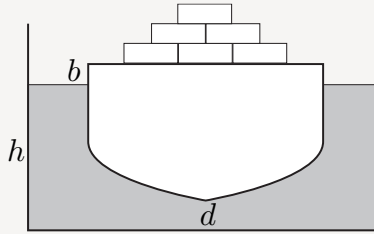
$V$  : le volume d'un bloc de béton.

$\rho_b, \rho_e$  : les densités volumiques du béton et de l'eau, respectivement ( $\rho_b > \rho_e$ ).

$A_b$  : l'aire du navire à son niveau de flottaison, c'est-à-dire l'aire de l'intersection entre le navire et le plan de la surface d'eau.

$A_e$  : l'aire du plancher de l'écluse (les murs de l'écluse sont parfaitement verticaux).

Exprimez  $\Delta h$  et  $\Delta d$  en fonction d'un sous-ensemble de ces variables. Les conclusions du capitaine et de son second sont-elles valables?



#### Question 4.1

Considérons deux sphères d'apparences identiques, de même rayon. L'une est en styromousse, recouverte d'une mince couche d'aluminium, et l'autre est en plomb massif, aussi recouverte d'aluminium. On laisse tomber les deux sphères du haut d'une tour. La sphère la plus lourde arrive au sol la première. Comment cela se peut-il, puisque l'accélération gravitationnelle est la même pour tous les objets et la force de résistance de l'air, qui ne dépend que de la forme de l'objet, devrait être la même pour les deux sphères? Expliquez en quelques lignes.

#### Problème 4.9

Donnez une expression pour la distance de freinage  $d$  d'un véhicule de masse  $m$  roulant à une vitesse  $v$ , en supposant un coefficient de friction dynamique  $\mu$  entre les pneus et la route. Discutez de l'augmentation ou de la diminution de  $d$  en fonction de  $\mu$ ,  $m$  et  $v$ .

#### Problème 4.10

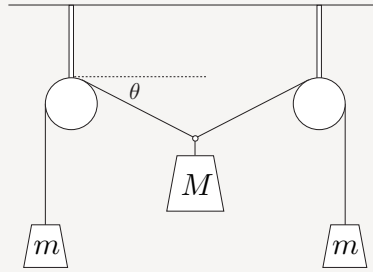
Considérez le système de masses reliées par une corde (voir illustration). Les cordes s'enroulent autour de poulies verrouillées qui ne peuvent tourner. Ces poulies sont fixées au plafond de manière rigide. On peut négliger la masse de la corde.

**A** Supposez premièrement qu'il n'y a pas de frottement entre la corde et les poulies, et que les trois masses sont à l'équilibre. Exprimez l'angle  $\theta$  en fonction des masses  $M$  et  $m$ . Y a-t-il des valeurs des masses qui rendent tout équilibre impossible? Ce problème a été formulé par Léonard de Vinci (1452/1519).

**B** Supposons maintenant que le coefficient de frottement statique entre les poulies et la corde est  $\mu$ . Trouvez maintenant une relation entre  $\theta$ ,  $M$ ,  $m$  et  $\mu$  qui permette de déterminer  $\theta$ . Notez que cette équation est transcendante et ne se prête pas à une solution explicite pour  $\theta$ .

**C** Posons  $\mu = 0,1$ . Si  $M/m = \frac{5}{2}$ , Y a-t-il une solution  $\theta$  à cette équation? Si oui, trouvez-la de manière numérique (à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur) à 1% près. Utilisez la méthode de votre choix,

par exemple par essai et erreur, en vous inspirant d'un graphique, etc.



#### Problème 4.11

En général, les grandes routes sont inclinées latéralement dans les virages, dans le but de minimiser les risques de dérapage. Quel doit être l'angle d'inclinaison optimal  $\theta$  d'une route par rapport à l'horizontale dans un virage ayant un rayon de courbure de 200 m, si la vitesse moyenne des véhicules est de 100 km/h?

#### Problème 4.12

On tire un petit projectile à la verticale, avec une vitesse initiale  $v_0$ . Le problème est de calculer son altitude  $z$  en fonction du temps, en tenant compte de la gravité et de la résistance de l'air. Comme l'objet est petit, on supposera que la résistance de l'air est exactement proportionnelle à la vitesse et que la force de résistance est  $m\gamma v$  (en grandeur),  $m$  étant la masse de l'objet,  $v$  sa vitesse et  $\gamma$  une constante. Nous supposons que la force de gravité est constante (on néglige sa variation en fonction de l'altitude). On adoptera comme origine la position du tir ( $z = 0$ ) et on supposera que le mouvement ne se produit que dans la direction  $z$ .

**A** Soit  $v(t)$  la composante en  $z$  de la vitesse du projectile. Écrivez l'équation différentielle que doit satisfaire  $v(t)$  en fonction du temps, d'après la deuxième loi de Newton.

**B** Solutionnez cette équation différentielle avec la condition initiale  $v(0) = v_0$ . L'équation s'intègre facilement.

**C** Exprimez maintenant l'altitude  $z$  en fonction du temps, d'après la solution trouvée à la partie précédente.

**D** Montrez que l'altitude maximale atteinte par le projectile ( $z_{\max}$ ), en fonction des paramètres  $v_0$ ,  $g$  et  $\gamma$ , est

$$z_{\max} = \frac{v_0}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2} \ln \left[ 1 + \frac{\gamma v_0}{g} \right]$$

**E** Exprimez le résultat de la partie précédente ( $z_{\max}$ ) dans les limites (i) de très faible résistance ( $\gamma \rightarrow 0$ ) et (ii) de très forte résistance ( $\gamma \rightarrow \infty$ ). Quelles modifications mineures devrait-on apporter à l'équation différentielle trouvée en (a) pour retrouver ces résultats plus simplement, sans passer par la solution trouvée en (b)–(d)?

**Problème 4.13**

Dans les années 1910, le physicien américain Millikan démontra directement la quantification de la charge électrique en étudiant le mouvement de fines gouttelettes d'huile se déplaçant entre les plaques d'un condensateur, à l'aide d'un microscope. Les gouttelettes sont soumises à la force de gravité, au champ électrique qui règne entre les plaques et à la force de viscosité de l'air. Le but de l'expérience est de mesurer la charge électrique de chaque gouttelette. Le condensateur est orienté de sorte que le champ électrique est parallèle à la force de gravité. Le mouvement à étudier est donc purement unidimensionnel.

**A** Premièrement, on débranche le condensateur de sorte que le champ électrique est nul. Les gouttelettes ne sont alors soumises qu'à la force de gravité et à la viscosité. On trouve que la vitesse limite d'une gouttelette est  $v_\infty = 0,040$  cm/s. Quel est alors le rayon  $R$  de la gouttelette? La densité de l'huile utilisée est  $\rho_h = 800$  kg/m<sup>3</sup>. La viscosité de l'air à 20° se trouve dans le tableau 4.1 des notes. La gouttelette est supposée parfaitement sphérique et l'accélération gravitationnelle est  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

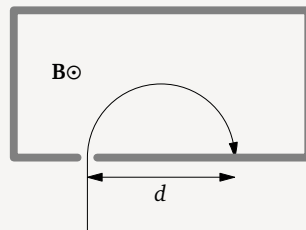
**B** On applique maintenant une différence de potentiel de 200 V aux bornes du condensateur, dont les plaques sont séparées de 1 cm. La polarité est telle que la force électrique sur la gouttelette est dans le même sens que la gravité, et la nouvelle vitesse limite est de  $v'_\infty = 0,058$  cm/s. Estimez la charge électrique  $q$  de la gouttelette à partir de ces données.

**C** En supposant que la gouttelette part du repos, combien de temps prend-elle pour atteindre 99% de sa vitesse limite? Vous n'avez pas besoin de refaire ici la démonstration faite en classe sur la vitesse de la gouttelette en fonction du temps.

**D** On a négligé la poussée d'Archimède dans ce problème. En supposant que nos mesures ne sont précises qu'à 1% près, est-ce justifié? La densité de l'air est  $\rho_a = 1,29$  kg/m<sup>3</sup>.

**Problème 4.14**

Une particule de charge  $q$ , de masse  $m$  et d'énergie  $E$  pénètre à l'intérieur d'un *spectromètre de masse*, c'est-à-dire d'une région dans laquelle un champ magnétique uniforme  $B$  est appliqué. La trajectoire de la particule devient alors circulaire et elle frappe la paroi à une distance  $d$  de son point d'entrée. Exprimez  $d$  en fonction des autres paramètres du problème.

**Problème 4.15**

Une particule chargée (charge  $q$ ) subit l'effet d'un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ , d'un champ électrique uniforme  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y$  et d'une force de résistance  $\mathbf{F}_{\text{res.}}$  de la part du milieu dans lequel elle se déplace. Cette force de résistance est proportionnelle à la vitesse et opposée à celle-ci :  $\mathbf{F}_{\text{res.}} = -\gamma\mathbf{v}$ , où  $\gamma$  est une constante.

On veut démontrer ici que la particule chargée suit une trajectoire initialement compliquée, mais qu'elle

finir par se déplacer à une vitesse constante  $\mathbf{v}_\infty$  (c'est-à-dire la limite de la vitesse quand  $t \rightarrow \infty$ ). Vous pouvez supposer que le mouvement est contenu dans le plan  $xy$ .

**A** Démontrez qu'il est possible que la particule se déplace à vitesse constante en tout temps. Autrement dit, démontrez que  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_\infty$  est une solution de  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  dans ce cas-ci et calculez les composantes de  $\mathbf{v}_\infty$  en fonction des paramètres du problème ( $E$ ,  $B$ ,  $\gamma$  et  $q$ ). Votre résultat est-il raisonnable quand (i)  $B = 0$  et quand (ii)  $\gamma = 0$ ? (C'est-à-dire : est-il intuitivement clair?) La solution  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_\infty$  n'est valable que pour des conditions initiales très particulières : il faut que  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_\infty$ . Supposons justement que  $\mathbf{v}(0) \neq \mathbf{v}_\infty$ . Le problème est maintenant de démontrer que  $\mathbf{v}(t) \rightarrow \mathbf{v}_\infty$  quand  $t \rightarrow \infty$ , où  $\mathbf{v}_\infty$  est l'expression trouvée en **A**. Dans ce but, utilisons l'astuce suivant : définissons le vecteur  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty$ . Le vecteur  $\mathbf{u}$  est la vitesse de la particule telle qu'observée à partir d'un référentiel se déplaçant à une vitesse  $\mathbf{V} = \mathbf{v}_\infty$  par rapport au référentiel d'origine.

**B** Démontrez que le vecteur  $\mathbf{u}$  satisfait à l'équation suivante :

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\gamma \mathbf{u} + q \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}$$

**C** Démontrez que la grandeur de  $\mathbf{u}$  diminue exponentiellement avec le temps. Pour ce faire, prenez le produit scalaire de  $\mathbf{u}$  avec l'équation ci-haut et tirez-en les conséquences nécessaires (une équation différentielle pour  $u^2$ , par exemple). Enfin, concluez la preuve recherchée que  $\mathbf{v}(t) \rightarrow \mathbf{v}_\infty$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

#### Problème 4.16

Dans un écran à rayons cathodiques (une technologie maintenant obsolète), la déflexion du faisceau d'électrons est effectuée à l'aide de champs magnétiques : deux bobines croisées dévient les électrons horizontalement et verticalement, respectivement. Pour illustrer comment la déviation dépend du champ appliqué et de la vitesse des électrons, voir la figure. Le champ sort de la page et n'est non nul qu'à l'intérieur de la bobine circulaire de rayon  $R$  indiquée. Les électrons de vitesse  $v$  entrent au point E et sortent au point S. On place l'origine du système cartésien au point E. À l'intérieur de la bobine, les électrons suivent une trajectoire circulaire dont le rayon  $r$  est plus grand que  $R$ .

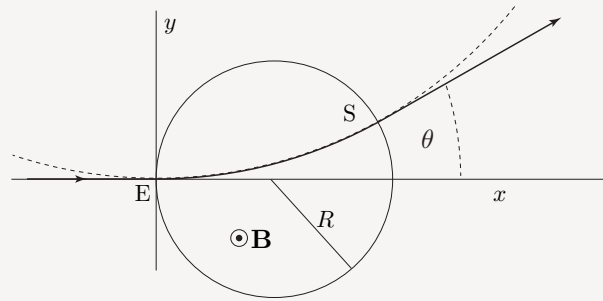
**A** Montrez que l'angle de déflexion  $\theta$  est donné par la relation suivante :

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{R}{r}$$

Indice : soit  $(x, y)$  les coordonnées du point S. Ce point est situé à la fois sur le cercle de la bobine et sur un autre cercle (en pointillé sur la figure), de rayon  $r$ . Les coordonnées  $x$  et  $y$  doivent donc satisfaire les équations de ces deux cercles et on peut, par élimination, les exprimer en fonction de  $R$  et de  $r$ . Vous pouvez premièrement déterminer  $\sin \theta$ , et ensuite utiliser des formules de trigonométrie pour exprimer le résultat en fonction de  $\tan(\theta/2)$ . Prenez soin de bien expliquer chacune des étapes de votre calcul.

**B** Que vaut  $r$  en fonction de l'intensité  $B$  du champ magnétique et de la vitesse  $v$  des électrons? Si  $R = 1$  cm et  $v = 10^7$  m/s, quelle valeur maximale de  $B$  (en tesla) est nécessaire, en supposant que l'angle  $\theta$  ne doit

jamais dépasser  $30^\circ$  ?





## CHAPITRE 5

# ÉNERGIE ET TRAVAIL

La solution exacte des équations du mouvement d'un système mécanique est en général impossible. En fait, seuls quelques systèmes relativement simples admettent une solution analytique complète qui permette d'exprimer la position des particules explicitement en fonction du temps écoulé. Par contre, même pour des systèmes très complexes, il existe des lois de conservation qui stipulent que certaines quantités, tels l'énergie, la quantité de mouvement et le moment cinétique, sont conservées au cours du temps. Ces lois de conservation nous permettent de caractériser partiellement le mouvement du système, même si celui-ci ne peut être calculé de manière complète. Dans ce chapitre, nous allons définir l'une de ces quantités, l'*énergie*, et décrire les circonstances où elle est conservée.

### A

#### Conservation de l'énergie en une dimension

Commençons par considérer le mouvement d'une particule de masse  $m$  contrainte de se déplacer en une seule dimension, avec coordonnée  $x$ . Supposons que cette particule subisse une force  $F(x)$  qui ne dépend que de la coordonnée de la particule.<sup>1</sup> Ce dernier détail est important : il ne faut pas que  $F$  dépende de la vitesse de la particule (donc toute force de viscosité ou de frottement est exclue) ou que  $F$  dépende de manière *explicite* du temps.<sup>2</sup> Dans ce cas, on peut définir la fonction suivante, qu'on appelle le *potentiel* de la force  $F$ , ou encore l'*énergie potentielle* de la particule au point  $x$  :

$$U(x) = - \int F(x) dx \quad \text{ou} \quad F(x) = - \frac{dU}{dx} \quad (5.1)$$

L'intégrale ci-haut est indéfinie, et donc  $U(x)$  est défini à une constante additive près.

D'autre part, on définit l'*énergie cinétique*  $K$  de la particule comme

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (5.2)$$

et l'*énergie totale*  $E$  comme

$$E = K + U(x) = \frac{1}{2} m v^2 + U(x) \quad (5.3)$$

1. Puisque nous sommes en une dimension, nous n'utiliserons pas la notation vectorielle dans cette section.  $F$  représente donc la composante en  $x$  de la force, et non la grandeur de la force, qui est  $|F|$ . De même,  $v$  représente la composante en  $x$  de la vitesse, etc.

2. Bien sûr, la force dépend de manière implicite du temps, car la position  $x(t)$  de la particule dépend, elle, du temps. Cependant, elle ne doit pas dépendre du temps autrement que par l'intermédiaire de la position.

Nous allons maintenant démontrer que l'énergie  $E$  est constante au cours du mouvement de la particule, en vertu de la deuxième loi de Newton et des définitions de  $K$  et  $U$ . Pour ce faire, il suffit de calculer la dérivée totale par rapport au temps de l'énergie et de constater qu'elle s'annule :

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} v^2 + \frac{dU}{dt} \\ &= \frac{1}{2}m \left( 2v \frac{dv}{dt} \right) + \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} \\ &= v(ma - F(x)) = 0\end{aligned}\tag{5.4}$$

La dernière égalité est valable en vertu de la deuxième loi de Newton.

#### Exemple 5.1 Énergie potentielle gravitationnelle

Considérons par exemple une particule se déplaçant uniquement le long de l'axe vertical  $z$ , en présence du champ gravitationnel uniforme  $-g$  (composante en  $z$ ). D'après la définition (5.1), on trouve ici

$$U(z) = - \int (-mg) dz = mgz + \text{cte}\tag{5.5}$$

En fixant la constante d'intégration à zéro, l'énergie conservée est alors

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \quad \left( v = \frac{dz}{dt} \right)\tag{5.6}$$

Considérons un objet lancé du sol ( $z = 0$ ) à la verticale avec une vitesse initiale  $v_0$ . On demande de déterminer la hauteur maximale  $h$  atteinte par l'objet. L'énergie de l'objet est au départ ( $z = 0$ ) purement cinétique :  $E = \frac{1}{2}mv_0^2$ . Au sommet de sa course ( $z = h$ ) l'énergie est purement potentielle, car  $v = 0$  à cet endroit et donc  $E = mgh$ . Comme l'énergie est toujours la même, on trouve

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \implies h = \frac{v_0^2}{2g}\tag{5.7}$$

#### Exemple 5.2 Énergie potentielle élastique

Considérons maintenant un ressort de constante  $k$  susceptible d'étirement ou de compression dans la direction  $x$  et choisissons l'origine au point d'équilibre du ressort. La force exercée sur une masse  $m$  attachée au ressort est alors  $F(x) = -kx$  (le signe  $-$  vient de ce que la force s'oppose au déplacement). La définition (5.1) entraîne alors

$$U(x) = - \int (-kx) dx = \frac{1}{2}kx^2\tag{5.8}$$

et l'énergie totale de la particule est

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\tag{5.9}$$

Supposons par exemple qu'un ressort soit comprimé d'une longueur  $d$  et ensuite relâché. On désire connaître la vitesse maximale  $v_{\max}$  de l'objet lors de son oscillation. Il suffit alors d'égaliser l'énergie de l'objet au maximum de la compression, alors que  $v = 0$ , à l'énergie de l'objet lorsque  $x = 0$ , quand l'énergie potentielle est minimale et l'énergie cinétique maximale. On trouve alors

$$E = \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \implies v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}d = \omega d\tag{5.10}$$

où  $\omega$  est la fréquence d'oscillation naturelle du ressort.



## B Conservation de l'énergie en trois dimensions

Nous allons maintenant généraliser la notion d'énergie potentielle au cas d'une particule se déplaçant en plus d'une dimension, en particulier en trois dimensions.

### 5.B.1 Forces conservatives

Supposons encore que la particule subit l'influence d'une force  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  – la notation vectorielle est rétablie – qui ne dépend que de la position de l'objet et non de sa vitesse ou du temps. On qualifie cette force de *conservative* si le vecteur  $\mathbf{F}$  est le gradient d'une fonction :

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (5.11)$$

ou, exprimé en composantes cartésiennes,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (5.12)$$

(l'annexe 11.C explique la notion de gradient). La fonction  $U(\mathbf{r})$  est encore appelée le *potentiel* associé à la force  $\mathbf{F}$ , ou encore l'*énergie potentielle* de la particule.

L'*énergie* de la particule est toujours définie par

$$E = K + U(\mathbf{r}) \quad K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (5.13)$$

sauf que l'énergie cinétique fait intervenir le carré de la grandeur de la vitesse,  $\mathbf{v}^2$ , et non une seule composante comme en dimension un. Pour démontrer que  $E$  est conservée, il suffit encore d'en calculer la dérivée par rapport au temps et de constater qu'elle s'annule :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}) \right) \\ &= m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla U(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \mathbf{v} \cdot (m \mathbf{a} - \mathbf{F}) = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Notons que nous avons encore supposé dans ce calcul que l'énergie potentielle  $U$  ne dépend pas *explicitement* du temps, mais qu'elle ne varie dans le temps que parce que la position  $\mathbf{r}$  de la particule varie. Dans le cas contraire, par exemple si l'objet qui produit la force  $\mathbf{F}$  se déplace, le calcul ci-haut est inapplicable et doit être généralisé de manière appropriée (nous reviendrons sur cette question plus bas). Notons aussi que nous avons calculé la dérivée par rapport au temps de  $U$  par la règle d'enchaînement :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \nabla U(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (5.15)$$

La relation  $dE/dt = 0$  constitue la loi de *conservation de l'énergie*, démontrée ici pour une particule dans un champ de force externe dérivé d'un potentiel.

D'après la relation (5.11), le potentiel n'est défini qu'à une constante additive près : ajouter une constante au potentiel ne change pas la force qui en découle. Choisir cette constante revient à choisir un point dans l'espace où le potentiel s'annule, et constitue une convention.

Notons tout de suite la différence essentielle entre les cas unidimensionnel et tridimensionnel : en une dimension, toute force  $F(x)$  qui ne dépend que de la coordonnée  $x$  possède un potentiel, défini à une constante additive près par l'intégrale (5.1). Par contre, en dimension  $D > 1$ , il n'est pas garanti que la force  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  dérive d'un potentiel : dans l'affirmative, la force est qualifiée de *conservative*, mais le contraire est mathématiquement possible. Plus précisément, on démontre qu'un champ de force  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  est conservatif si et seulement si la condition suivante est respectée :

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (5.16)$$

En analyse vectorielle, cette condition revient à demander que le *rotationnel* du champ vectoriel  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  s'annule. En pratique, cette condition est le plus souvent respectée. L'exception notable est le phénomène d'*induction électromagnétique*, où un champ magnétique qui varie dans le temps induit un champ électrique qui ne respecte pas cette condition.<sup>3</sup>

## 5.B.2 Forces centrales

Une force est qualifiée de *centrale* si elle est toujours dirigée dans la direction radiale  $\mathbf{e}_r$  (en coordonnées sphériques, cf. Annexe 11.B) et qu'elle ne dépend pas des angles. Autrement dit, une telle force s'exprime comme suit :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{e}_r \quad (5.17)$$

Les forces centrales sont toujours conservatives et le potentiel associé est donné par l'expression suivante :

$$U(r) = \int_r^{r_0} F(r') dr' \quad (5.18)$$

La constante  $r_0$  indique le zéro de l'énergie potentielle. Dans certains cas, on peut choisir  $r_0 = \infty$ , dans d'autres,  $r_0 = 0$ , etc. En effet, le calcul du gradient en coordonnées sphériques donne

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r = F(r)\mathbf{e}_r \quad (5.19)$$

*Remarque* : toutes les forces centrales sont conservatives. En revanche, une force peut ne pas être centrale et être conservative : le caractère central d'une force est une condition suffisante, mais non nécessaire. L'exemple le plus simple d'une force non centrale, mais conservative est la somme de deux ou plusieurs forces centrales avec des centres d'attraction différents. Dans ce cas, la force nette n'est pas toujours dirigée vers le même point, mais elle dérive quand même d'un gradient : le potentiel de la force totale est la somme des potentiels des différentes forces centrales en cause.

### Exemple 5.3 Force de gravité

La force gravitationnelle créée par un objet de masse  $M$ , fixe à l'origine, sur un objet de masse  $m$  à une distance  $r$  de l'origine est un exemple de force centrale :

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (5.20)$$

3. Les champs électrique et magnétique contiennent aussi une certaine énergie et c'est la somme de cette énergie des champs et de l'énergie des particules qui les subissent et les créent qui est conservée. La loi de conservation de l'énergie est donc plus subtile dans ce cas.

Le potentiel associé se calcule comme indiqué ci-haut, avec  $r_0 \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} U(r) &= - \int_r^\infty \frac{GMm}{r'^2} dr' \\ &= \left[ \frac{GMm}{r'} \right]_r^\infty \\ &= - \frac{GMm}{r} \end{aligned} \quad (5.21)$$

L'énergie totale d'une particule de masse  $m$  dans le champ gravitationnel fixe d'un objet de masse  $M$  est donc

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \frac{GMm}{r} \quad (5.22)$$

Le choix de l'infini comme point de référence est naturel dans ce cas-ci, parce que la force gravitationnelle diminue suffisamment rapidement avec la distance. Ainsi, un objet infiniment éloigné d'un autre peut être considéré comme libéré de son influence gravitationnelle et il est alors naturel d'y associer le zéro de l'énergie potentielle.

#### Exemple 5.4 Force électrique

La forme mathématique de la force électrique est très semblable à celle de la force gravitationnelle. On voit immédiatement que l'énergie potentielle électrique d'une charge  $q_1$  en présence d'une charge  $q_2$  fixe à l'origine est

$$U(r) = k \frac{q_1 q_2}{r} \quad (5.23)$$

Si les deux charges sont de même signe ( $q_1 q_2 > 0$ ) il y a répulsion et l'énergie potentielle augmente quand  $r$  diminue. Au contraire, si les deux charges sont de signes opposés ( $q_1 q_2 < 0$ ), il y a attraction et l'énergie potentielle augmente quand  $r$  augmente.

## C Potentiel gravitationnel

Récrivons l'expression (5.21) pour l'énergie potentielle d'une particule de masse  $m$  au point  $\mathbf{r}$  en présence d'une masse  $m_1$  située au point  $\mathbf{r}_1$  :

$$U(\mathbf{r}) = -G \frac{m m_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad (5.24)$$

En vertu du principe de superposition, cette expression se généralise immédiatement au cas de  $N$  masses  $m_i$  situées aux positions  $\mathbf{r}_i$  :

$$U(\mathbf{r}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (5.25)$$

Définissons maintenant le *potentiel gravitationnel*  $V(\mathbf{r})$  comme l'énergie potentielle gravitationnelle  $U(\mathbf{r})$  divisée par la masse  $m$  de la particule qui ressent la force :

$$V(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{m} U(\mathbf{r}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (5.26)$$

L'avantage de cette définition est que  $V(\mathbf{r})$  est indépendant de la particule ressentant la force et est directement relié au champ gravitationnel  $\mathbf{g}$  :

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (5.27)$$

### 5.C.1 Potentiel gravitationnel d'un objet sphérique

La loi de gravitation telle que formulée en (3.15) n'est valable que pour un objet ponctuel. Or, elle décrit assez bien la force que la Terre exerce sur la Lune, et la Terre est loin d'être un objet ponctuel pour un observateur situé sur la Lune, encore moins pour un satellite artificiel ! La raison en est que la force gravitationnelle exercée par un objet possédant une symétrie sphérique est la même à l'extérieur de l'objet que si toute la masse de l'objet était concentrée en son centre. Ainsi, si on place l'origine au centre de l'objet (e.g., au centre de la Terre<sup>4</sup>), alors le champ gravitationnel causé par cet objet est

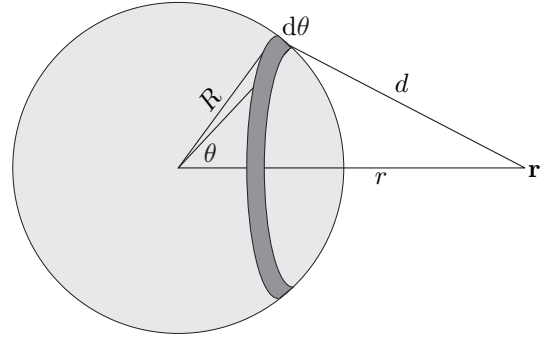
$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (5.28)$$

où  $M$  est la masse totale de l'objet contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon  $r$ .

Nous allons maintenant démontrer cette assertion à l'aide du potentiel gravitationnel. Commençons par considérer le cas d'une coquille sphérique très mince de rayon  $R$  et de densité superficielle  $\sigma$ . Référons-nous pour cela à la figure 5.1.

**FIGURE 5.1**

Coquille sphérique de densité superficielle  $\sigma$  et de rayon  $R$  produisant un potentiel gravitationnel au point  $\mathbf{r}$ , à une distance  $r$  du centre. Tous les points situés sur l'anneau indiqué sont à une distance  $d$  du point  $\mathbf{r}$  et sous-tendent un angle  $d\theta$  avec le centre et le vecteur  $\mathbf{r}$ .



Divisons la coquille sphérique en anneaux, de telle façon que chaque anneau soit situé à une distance constante  $d$  du point  $\mathbf{r}$ . Considérons en particulier un anneau situé à une coordonnée angulaire  $\theta$  et dont la largeur sous-tend un angle  $d\theta$ . La masse  $dM$  de cet anneau est égale à sa superficie fois la densité  $\sigma$  :

$$dM = 2\pi R \sin \theta \times \sigma \times R d\theta \quad (5.29)$$

En fonction de  $\theta$ , la distance  $d$  s'obtient par la loi des cosinus :

$$d^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta \quad (5.30)$$

La contribution de cet anneau au potentiel gravitationnel est donc

$$dV(\theta) = -G \frac{2\pi R^2 \sigma \sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} \quad (5.31)$$

Le potentiel total au point  $\mathbf{r}$  est obtenu en intégrant cette expression de  $\theta = 0$  à  $\theta = \pi$ . Définissons la variable  $z = \cos \theta$ . Alors  $dz = -\sin \theta d\theta$  et on obtient plutôt

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= -2\pi G R^2 \sigma \int_{-1}^1 dz \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr z}} \\ &= -2\pi G R^2 \sigma \times -\frac{1}{rR} \left[ \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr z} \right]_{-1}^1 \\ &= 2\pi \sigma G \frac{R}{r} \left\{ \sqrt{(R-r)^2} - \sqrt{(R+r)^2} \right\} \\ &= 2\pi \sigma G \frac{R}{r} (|R-r| - |R+r|) \end{aligned} \quad (5.32)$$

4. Bien sûr, la Terre n'est qu'approximativement sphérique. C'est plutôt un ellipsoïde aplati.

Si  $R > r$  (à l'intérieur de la coquille) l'expression entre parenthèses devient  $-2r$ , alors que si  $R < r$  (à l'extérieur), elle devient  $-2R$ . Donc

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} -4\pi R\sigma G = -G \frac{M}{R} & (r < R) \\ -G \frac{4\pi R^2\sigma}{r} = -G \frac{M}{r} & (r > R) \end{cases} \quad (5.33)$$

où  $M = 4\pi R^2\sigma$  est la masse de la coquille.

Comme le potentiel gravitationnel  $V$  est constant à l'intérieur de la coquille, son gradient  $\nabla V$  est nul et le champ gravitationnel s'annule. Par contre, à l'extérieur, le champ gravitationnel est

$$\mathbf{g}(r) = -\nabla V(r) = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (\text{extérieur}) \quad (5.34)$$

Considérons maintenant un objet sphérique de rayon  $R$  dont la densité volumique  $\rho(r')$  ne dépend que de la distance  $r'$  au centre de la sphère. On peut alors diviser cette sphère en une série de coquilles concentriques d'épaisseur  $dr'$ , chacune de ces coquilles portant une densité de masse par unité de surface égale à  $\sigma = \rho(r')dr'$ . La masse de chacune de ces coquilles est alors

$$dM(r') = 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \quad (5.35)$$

Le champ gravitationnel à l'extérieur de la sphère de rayon  $r$  est donné par la somme des champs gravitationnels causés par les coquilles de rayons  $r' < r$  :

$$\mathbf{g}(r) = -G \mathbf{e}_r \int_0^r \frac{dM(r')}{r^2} = -G \frac{M(r)}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (5.36)$$

où  $M(r)$  est la masse totale incluse dans la sphère de rayon  $r$  :

$$M(r) = \int_0^r dM(r') = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' \quad (5.37)$$

Par exemple, supposons que la densité  $\rho$  d'une planète de rayon  $R$  et de masse totale  $M_{\text{tot}}$  soit constante. Dans ce cas,

$$M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 = M_{\text{tot}} \left( \frac{r}{R} \right)^3 \quad (5.38)$$

et donc le champ gravitationnel  $\mathbf{g}$ , en fonction de la distance  $r$  au centre de la planète, est

$$\mathbf{g}(r) = \begin{cases} -G M_{\text{tot}} \frac{r}{R^3} \mathbf{e}_r & (r < R) \\ -G M_{\text{tot}} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r & (r > R) \end{cases} \quad (5.39)$$

Finalement, mentionnons que cette propriété du champ gravitationnel d'un objet sphérique de se comporter comme si sa masse était concentrée en son centre dépend essentiellement de la dépendance en  $1/r^2$  de la force gravitationnelle et ne serait pas vraie si la force avait une dépendance différente en fonction de  $r$ . Comme la force électrique a aussi une dépendance en  $1/r^2$ , cette propriété s'applique aussi à un objet chargé : un objet sphérique sur lequel on distribue une charge électrique de manière symétrique produit un champ électrique comme si toute sa charge était concentrée en son centre, pourvu que l'observateur se situe à l'extérieur de l'objet.

### 5.C.2 Force exercée sur un objet sphérique

Nous avons démontré que le champ gravitationnel causé par un objet sphérique est identique à celui que causerait le même objet si toute sa masse était concentrée en son centre. La contrepartie de cette affirmation est que la force gravitationnelle totale exercée par un point matériel sur un objet sphérique est la même que si toute la masse de l'objet sphérique était concentrée en son centre. Ceci est une conséquence directe de la troisième loi de Newton. Or, en vertu du principe de superposition, cela vaut aussi si le champ gravitationnel ressenti par l'objet sphérique n'est pas causé par un simple point matériel, mais est quelconque. Ainsi, la Terre et la Lune, dans l'approximation sphérique, exercent mutuellement des forces gravitationnelles identiques à celles qu'exerceraient des points mathématiques.

### 5.C.3 Potentiel gravitationnel à la surface de la Terre

Supposons maintenant que la Terre soit parfaitement sphérique et considérons l'énergie potentielle gravitationnelle à la surface de la Terre. Si  $R_\oplus$  est le rayon terrestre,  $h$  la hauteur d'un objet au-dessus du niveau du sol et si  $h \ll R_\oplus$ , alors l'énergie potentielle admet un développement de Taylor qu'on peut facilement tronquer au premier ordre :

$$\begin{aligned}
 U(h) &= -\frac{GMm}{R_\oplus + h} \\
 &= -\frac{GMm}{R_\oplus} \frac{1}{1 + h/R_\oplus} \\
 &= -\frac{GMm}{R_\oplus} \left( 1 - \frac{h}{R_\oplus} + \dots \right) \\
 &\approx -\frac{GMm}{R_\oplus} + \frac{GMm}{R_\oplus^2} h
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Le premier terme est une constante sans importance. Le deuxième n'est autre que  $mgh$ , où  $g = GM/R_\oplus^2$  est l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre. On retrouve donc cette expression familière comme un cas approximatif de l'expression (5.21).

### 5.C.4 Énergie potentielle gravitationnelle et centre de masse

Considérons un objet macroscopique sous l'influence d'un champ gravitationnel uniforme  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$  à la surface de la Terre. L'énergie potentielle gravitationnelle de chaque particule formant l'objet est  $m_i g z_i$ , où  $z_i$  est la coordonnée verticale de la  $i^{\text{ème}}$  particule par rapport à une certaine référence. L'énergie potentielle totale de l'objet dans ce champ gravitationnel est alors la somme des énergies potentielles de chaque particule formant l'objet, à savoir

$$U = \sum_i m_i g z_i = g \sum_i m_i z_i = M_{\text{tot.}} g Z_{\text{cm}} \tag{5.41}$$

où  $Z_{\text{cm}}$  est la composante en  $z$  de la position du centre de masse  $\mathbf{R}_{\text{cm}}$ . Donc, en ce qui regarde l'énergie potentielle dans le champ de pesanteur terrestre, on peut considérer que la masse d'un objet est concentrée en son centre de masse. Cependant, ceci n'est vrai que si le champ gravitationnel est uniforme. Si les dimensions de l'objet sont si grandes que le champ gravitationnel varie de manière appréciable le long de l'objet, alors ce résultat n'est pas applicable.

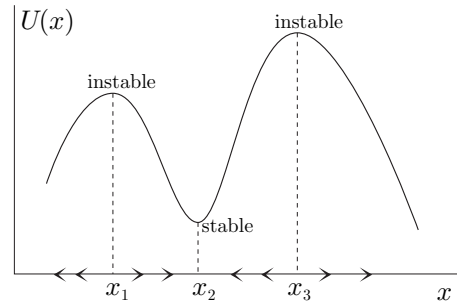
## D Énergie potentielle et stabilité

Aux fins de la présente discussion, considérons une particule qui se déplace en une seule dimension, décrite par une coordonnée  $x$ . Le champ de force est alors une simple fonction  $F(x)$  et la force pointe vers la droite si  $F > 0$ , vers la gauche si  $F < 0$ . Le potentiel de cette force est une fonction  $U(x)$  dont la dérivée est ainsi reliée à la force :

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \quad (5.42)$$

**FIGURE 5.2**

Points d'équilibre stables ( $x_2$ ) et instables ( $x_1$  et  $x_3$ ) sur un graphique d'énergie potentielle en une dimension. Les flèches sur l'axe indiquent la direction de la force dans chacune des régions.



On dit que le point  $x_0$  est un *point d'équilibre* si la force est nulle à cet endroit :  $F(x_0) = 0$ ; autrement dit, si la dérivée du potentiel s'annule à  $x_0$ . On qualifie l'équilibre de *stable* si, lorsqu'on déplace la particule légèrement de  $x_0$ , la force tend à la faire revenir vers  $x_0$ . Cette condition est remplie si la dérivée de la force est négative au point  $x_0$ . En effet, en effectuant un développement de Taylor de  $F(x)$  autour du point  $x_0$ , on trouve

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)F'(x_0) + \dots \quad (5.43)$$

Dans l'hypothèse que  $F(x_0) = 0$  et  $F'(x_0) < 0$ , la force est négative (c.-à-d. vers la gauche) si  $x > x_0$  et positive (c.-à-d. vers la droite) si  $x < x_0$ , ce qui correspond bien à la notion de stabilité. Dans le cas contraire, si  $F'(x_0) > 0$ , la force a tendance à éloigner la particule de  $x_0$  si cette dernière en est légèrement déplacée : l'équilibre est qualifié d'*instable*. En fonction du potentiel  $U$ , un point d'équilibre stable  $x_0$  correspond aux conditions  $U'(x_0) = 0$  et  $U''(x_0) > 0$ , alors qu'un point d'équilibre instable correspond aux conditions  $U'(x_0) = 0$  et  $U''(x_0) < 0$ . Le développement de Taylor de l'énergie potentielle  $U(x)$  autour d'un point d'équilibre  $x_0$  s'écrit

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (5.44)$$

(le terme linéaire en  $x - x_0$  s'annule puisque  $U'(x_0) = 0$ ). Si  $x - x_0$  reste petit, c'est-à-dire si la particule ne s'éloigne pas beaucoup du point d'équilibre, alors on peut tronquer la série de Taylor au terme quadratique sans faire une trop grande erreur. L'énergie potentielle affecte alors la forme d'une parabole. Si l'équilibre est stable, le potentiel a alors la même forme que pour une masse liée à un ressort obéissant à la loi de Hooke, avec une constante de rappel  $k = U''(x_0)$ .

Si la dérivée deuxième du potentiel s'annule ( $U''(x_0) = 0$ ) au point d'équilibre, alors il faut se rendre jusqu'au terme cubique dans le développement de Taylor :

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{6}U^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \quad (5.45)$$

et l'équilibre est alors instable, car la force a le même signe de part et d'autre du point d'équilibre, de sorte que l'objet s'éloigne de  $x_0$  si on le déplace légèrement vers la gauche (si  $U^{(3)}(x_0) > 0$ ) ou vers la droite (si  $U^{(3)}(x_0) < 0$ ). Plus généralement, c'est le premier coefficient non nul de la série de Taylor (autre que le terme constant) qui détermine la nature de l'équilibre. Si tous les coefficients sont nuls sauf le terme constant,

alors l'énergie potentielle est simplement une constante dans cette région de l'espace et la force est nulle. On parle alors d'équilibre *indifférent*.

**Exemple 5.5**

La notion de stabilité s'applique aussi très facilement aux systèmes qui, sans être strictement unidimensionnels, n'ont qu'un seul degré de liberté. Considérons par exemple un pendule rigide, c'est-à-dire une masse  $m$  attachée à l'extrémité d'une tige rigide sans masse de longueur  $\ell$ , dont l'autre extrémité est fixée à un pivot. L'énergie potentielle du pendule en fonction de l'angle d'inclinaison  $\varphi$  est

$$U(\varphi) = -mg\ell \cos \varphi \quad (5.46)$$

La force correspondante est obtenue en appliquant le gradient en coordonnées cylindriques :

$$F_\varphi(\varphi) = -\frac{1}{\ell} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mg \sin \varphi \quad (5.47)$$

Il y a deux points d'équilibre :  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi$ . La dérivée de la force est

$$F'_\varphi(\varphi) = -\frac{1}{\ell} U''(\varphi) = -mg \cos \varphi \quad (5.48)$$

L'équilibre est donc stable à  $\varphi = 0$  ( $U''(0) > 0$ ) et instable à  $\varphi = \pi$  ( $U''(\pi) < 0$ ).

La généralisation à plusieurs dimensions et plusieurs particules de la notion de stabilité est plus délicate. Encore que la condition d'équilibre soit bien évidemment donnée par  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ , l'expression mathématique de la condition de stabilité est plus compliquée : il faut que la position d'équilibre  $\mathbf{r}$  corresponde à un minimum local de l'énergie potentielle  $U(\mathbf{r})$  dans toutes les directions. Autrement dit, le système en son entier doit avoir tendance à revenir à son point d'équilibre si on le déplace légèrement, et ce, quelle que soit la direction de ce déplacement. Considérons à cet effet le développement de Taylor de l'énergie potentielle autour du point d'équilibre  $\mathbf{r}_0$  :

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_0) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{r}_0} (x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{r}_0} (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \dots \quad (5.49)$$

où nous avons noté les trois coordonnées  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ . Comme  $\mathbf{r}_0$  est un point d'équilibre, le deuxième terme de cette expression s'annule. Il reste le dernier terme, qui est une forme quadratique en fonction du vecteur déplacement  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ . Adoptons une notation proche de l'algèbre linéaire, où  $X$  désigne un vecteur colonne contenant les trois composantes du déplacement :

$$X = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

Introduisons la *matrice hessienne*  $H$  dont les éléments sont les deuxièmes dérivées partielles de la fonction  $U$  évaluées au point d'équilibre :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{r}_0} \quad (5.51)$$

Alors l'énergie potentielle est approximativement donnée par

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_0) + X^T H X \quad (5.52)$$



où  $X^T$  est le vecteur rangé transposé de  $X$ . L'équilibre au point  $\mathbf{r}_0$  est stable si  $X^T H X > 0$ , pour toute valeur de  $X$ . Autrement dit, la matrice  $H$  doit être définie positive ou, ce qui est équivalent, toutes ses valeurs propres doivent être positives.

Ceci n'est pas toujours possible. En particulier, on montre qu'une particule se déplaçant dans un champ gravitationnel (ou un champ électrique) ne peut pas jouir d'un équilibre stable, mais seulement d'un équilibre instable. Ce serait le cas, par exemple, d'une particule située à un point intermédiaire entre la Terre et la Lune où les forces gravitationnelles exercées par ces deux astres se compensent mutuellement. Dans ce cas, l'équilibre pourrait sembler stable dans une direction, mais il serait instable dans une autre direction.

## E Travail

La notion de force conservative a été définie par la notion de potentiel d'une force. Étroitement liée à cette notion est celle du *travail* d'une force, que nous expliquons ici.

La définition élémentaire du travail d'une force  $\mathbf{F}$  uniforme (c'est-à-dire constante dans l'espace) est le produit de la force par le déplacement : si une particule se déplace de manière linéaire du point initial ( $\mathbf{r}_i$ ) au point final ( $\mathbf{r}_f$ ), alors le travail de la force  $\mathbf{F}$  sur cette particule est

$$W = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i) \quad (5.53)$$

En fait, cette définition n'est pas très utile, parce qu'une particule ne se déplace généralement pas sur une droite et la force appliquée n'est généralement pas uniforme. Il faut donc généraliser la notion de travail à une trajectoire courbe.

Supposons que la particule soit initialement au point  $\mathbf{r}_i$  et qu'elle se déplace selon une trajectoire  $C$  jusqu'au point  $\mathbf{r}_f$ . En chaque point  $\mathbf{r}$  de sa trajectoire, la particule subit une force différente  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ . La définition correcte du travail consiste à subdiviser la trajectoire en un grand nombre  $N$  de segments linéaires (cf. Fig. 5.3). Si chacun des segments est suffisamment petit, on peut négliger la variation de la force le long du segment et définir le travail le long du segment comme en (5.53). Le travail total le long de la trajectoire est alors la somme du travail effectué sur chaque segment :

$$W \approx \sum_{n=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}_n) \cdot \Delta \mathbf{r}_n \quad (\Delta \mathbf{r}_n \equiv \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}) \quad (5.54)$$

(notons que  $\mathbf{r}_N \equiv \mathbf{r}_f$  et que  $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}_i$ ). Dans la limite où  $N \rightarrow \infty$  et où la taille des segments tend vers zéro, cette définition du travail devient exacte et est donnée par une intégrale :

$$W[C] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}_n) \cdot \Delta \mathbf{r}_n = \int_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (5.55)$$

Le travail  $W[C]$  dépend a priori du chemin  $C$  utilisé pour aller de  $\mathbf{r}_i$  à  $\mathbf{r}_f$ . En particulier, si le chemin  $C$  est inversé, c'est-à-dire s'il est parcouru en sens inverse, de  $\mathbf{r}_f$  à  $\mathbf{r}_i$ , alors le travail change de signe. On écrit alors

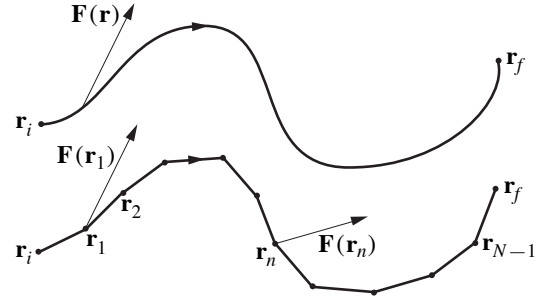
$$W[C^{-1}] = -W[C] \quad (5.56)$$

où  $C^{-1}$  désigne le même chemin que  $C$ , mais parcouru dans le sens opposé. D'autre part, si on place deux chemins  $C$  et  $D$  bout à bout, la fin de l'un coïncidant avec le début de l'autre, et qu'on désigne par  $CD$  le chemin complet ainsi obtenu, on a la relation

$$W[CD] = W[C] + W[D] \quad (5.57)$$

FIGURE 5.3

La définition générale du travail nécessite le remplacement d'un chemin  $C$  par un ensemble de  $N$  segments linéaires et la prise de la limite  $N \rightarrow \infty$ .



### 5.E.1 Théorème travail-énergie

La définition du travail étant énoncée, nous pouvons maintenant démontrer le **théorème travail-énergie** :

#### Théorème 5.1 Travail-énergie

Si  $\mathbf{F}$  est la force totale exercée sur la particule et  $C$  la trajectoire réelle de la particule, alors le travail de  $\mathbf{F}$  le long de  $C$  est égal au gain d'énergie cinétique de la particule (énergie cinétique finale moins énergie cinétique initiale) :

$$W[C] = K_f - K_i \quad (5.58)$$

**Preuve:** La démonstration est simple : comme  $\mathbf{F}$  est la force totale et  $C$  la trajectoire réelle de la particule, alors  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  et on peut transformer l'intégrant de (5.55) de la manière suivante :

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m d\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m d(\mathbf{v}^2) \quad (5.59)$$

L'intégrant est donc une différentielle totale et

$$W[C] = \frac{1}{2} m \int_C d(\mathbf{v}^2) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_f^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2 \quad (5.60)$$

Le théorème est donc démontré.

### 5.E.2 Travail et forces non conservatives

D'après la définition (5.11), toute force qui dépend de la vitesse n'est pas conservative. C'est le cas d'une force de résistance au mouvement, causée soit par la viscosité, la turbulence ou le frottement.<sup>5</sup> Décomposons maintenant la force totale  $\mathbf{F}$  agissant sur une particule en une partie conservative  $\mathbf{F}_c = -\nabla U$  et une partie non conservative  $\mathbf{F}'$  :

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \mathbf{F}' \quad (5.61)$$

Le travail  $W$  peut aussi être décomposé en deux termes :  $W = W_c + W'$ . Calculons maintenant la contribution  $W_c$  de la force conservative au travail :

$$W_c = \int_C \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \nabla U \cdot d\mathbf{r} = - \int_C dU = -U_f + U_i \quad (5.62)$$

5. Dans ce dernier cas, la force ne dépend apparemment pas de la vitesse, mais ce jugement est hâtif : la force de frottement ne dépend peut-être pas beaucoup de la grandeur de la vitesse, mais elle dépend de la *direction* de la vitesse, car elle s'oppose toujours au mouvement.

Le théorème travail-énergie s'exprime donc comme suit :

$$W' - U_f + U_i = K_f - K_i \implies W' = E_f - E_i \quad (5.63)$$

Autrement dit, le travail des forces non conservatives est égal au gain d'énergie totale de la particule.

Maintenant, les forces non conservatives peuvent être divisées en deux types : (i) les forces dites *dissipatives*, qui s'opposent au mouvement, comme celles causées par la viscosité, la turbulence et le frottement dynamique, et (ii) les forces de *contrainte*, qui sont toujours perpendiculaires à la vitesse de l'objet ( $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ ). Comme les forces dissipatives sont *grosso modo* opposées à la vitesse, leur travail est négatif et elles ne peuvent que diminuer l'énergie mécanique de la particule. Par contre, les forces de contrainte ne peuvent exercer aucun travail, car elles sont toujours perpendiculaires au déplacement :

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = 0 \quad (5.64)$$

La force magnétique  $\mathbf{F}_{\text{mag.}} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ , quoiqu'elle ne soit pas considérée habituellement comme une force de contrainte, entre dans cette catégorie. La force de frottement *statique* entre aussi dans cette catégorie, car elle s'applique en l'absence de déplacement ( $\mathbf{v} = 0$ ). En résumé, les forces dissipatives vont diminuer l'énergie totale  $E$  d'un objet, alors que les forces de contrainte (incluant la force magnétique) vont la conserver (même si elles ne sont pas appelées *conservatives* au sens strict de l'éq. (5.11)).

### 5.E.3 Travail et chemin parcouru

Le travail d'une force conservative est indépendant de la trajectoire  $C$  et ne dépend que de la valeur de la fonction  $U$  aux points de départ et d'arrivée. C'est ce qui ressort du calcul (5.62). L'inverse est aussi vrai : si le travail d'une force  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  qui ne dépend que de la position est indépendant du chemin  $C$  suivi pour le calculer, alors cette force est conservative au sens de l'éq. (5.11) : elle est le gradient d'une fonction. La preuve en est simple : il suffit de trouver une fonction  $U(\mathbf{r})$  qui puisse servir de potentiel. Or, une telle fonction est le travail effectué par la force  $\mathbf{F}$  du point  $\mathbf{r}$  jusqu'à un point de référence fixe  $O$ , qui peut être l'origine, l'infini, ou tout autre point convenable :

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^O \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.65)$$

Par hypothèse, cette quantité ne dépend pas du chemin emprunté pour le calculer et le potentiel  $U(\mathbf{r})$  est une fonction bien définie de la position. D'autre part, son gradient est bien relié à la force par la relation (5.11). Ceci se démontre en considérant le travail effectué le long d'un segment infinitésimal  $d\mathbf{r}$  originaire du point  $\mathbf{r}$ , comme la différence du travail de  $O$  à  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  et du travail de  $O$  à  $\mathbf{r}$  :

$$\begin{aligned} \delta W &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) \\ &= -\nabla U(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Comme cette relation est vraie pour tout vecteur  $d\mathbf{r}$  infinitésimal, on a nécessairement l'égalité (5.11). En résumé, le fait que le travail soit indépendant du chemin et que la force soit le gradient d'une fonction sont des propriétés équivalentes, qui caractérisent une force conservative.

### 5.E.4 Principe de Bernoulli

Le principe de Bernoulli stipule que la pression d'un fluide incompressible diminue lorsque sa vitesse d'écoulement augmente, conformément à la relation suivante :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P + \varepsilon_g = \text{cte} \quad (5.67)$$

où  $\varepsilon_g$  est la densité d'énergie potentielle du fluide, par exemple l'énergie potentielle gravitationnelle par unité de volume  $\varepsilon_g = \rho g z$ . La relation (5.67) se démontre de la manière suivante : considérons un élément de fluide de volume  $dV$ . L'énergie de cet élément comprend son énergie cinétique de translation  $\frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \rho v^2 dV$ , son énergie potentielle dans le champ de gravitation  $\varepsilon_g dV$  et son énergie interne  $\varepsilon_{\text{int.}} dV$  qui dépend de la température et de la densité :

$$E = \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \varepsilon_g + \varepsilon_{\text{int.}} \right) dV \quad (5.68)$$

Si le fluide est incompressible et si la température est constante, le dernier terme  $\varepsilon_{\text{int.}}$  ne change pas dans le temps. L'énergie  $E$  n'est pas conservée, car l'élément de fluide n'est pas isolé ! Les autres parties du fluide agissent sur lui par l'intermédiaire de la pression qu'ils exercent. Cette pression produit un travail sur l'élément de fluide. Si on imagine que l'élément de fluide a été transporté à sa position actuelle à partir de la surface (ou d'un quelconque point de référence), alors le travail exercé sur l'élément par son environnement est la force fois le déplacement. Or, la force exercée sur l'élément est la différence de pression entre sa surface supérieure et sa surface inférieure, fois la surface de l'élément :  $F = -dP \times dA$  (le signe  $-$  provient de ce que la force s'applique dans la direction où la pression diminue). Le travail effectué en déplaçant le fluide sur une distance verticale  $dz$  égale à sa hauteur est  $dW = -dP \times dA dz = -dP \times dV$ . En sommant tous les travaux de la surface jusqu'à la position actuelle de l'élément, on trouve

$$W = (P_0 - P) dV \quad (5.69)$$

où  $P_0$  est la pression au point de référence (la surface, par exemple). Or, d'après le théorème travail-énergie, ce travail donne le changement d'énergie de l'élément de fluide. La quantité

$$E - W = \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \varepsilon_g + \varepsilon_{\text{int.}} + P - P_0 \right) dV \quad (5.70)$$

est donc constante. En tenant compte du fait que  $\varepsilon_{\text{int.}}$  est constant, on retrouve donc la relation (5.67).

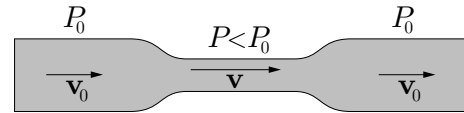
Pour comprendre plus intuitivement ce principe, considérons un écoulement d'eau dans un tuyau qui comporte un rétrécissement soudain (cf. Fig. 5.4). Dans la région normale du tuyau, le fluide s'écoule à une vitesse  $v_0$  et la pression est  $P_0$ . Dans la région étroite, la pression diminue ( $P < P_0$ ) et la vitesse augmente ( $v > v_0$ ). La relation entre les deux est donnée par l'éq. (5.67) :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P = \frac{1}{2} \rho v_0^2 + P_0 \quad (5.71)$$

En fait, la vitesse doit augmenter dans la partie étroite du tuyau pour que le débit demeure constant. Mais, pour que sa vitesse augmente, un élément de fluide doit accélérer à l'entrée de la partie étroite du tuyau. Pour qu'il accélère, une force dirigée vers la droite doit être exercée sur lui par son environnement et une telle force ne peut exister que si la pression immédiatement à gauche de l'élément est plus grande que la pression immédiatement à droite. Donc  $P_0 > P$ . À la sortie de la région étroite, c'est le contraire qui se produit.

**FIGURE 5.4**

Écoulement d'eau dans un tuyau comportant une région plus étroite : illustration du principe de Bernoulli.



Le principe de Bernoulli est à la base du fonctionnement des avions. La forme de l'aile d'avion est telle que l'écoulement d'air est plus rapide sur la face supérieure de l'aile que sur sa face inférieure (le trajet de l'air est plus grand sur la face supérieure, car l'aile y est plus incurvée). En raison du principe de Bernoulli, la pression est donc plus élevée sur la face inférieure de l'aile que sur la face supérieure, ce qui produit une force nette sur l'aile, dirigée vers le haut. Bien sûr, l'air n'est pas un fluide incompressible et le principe de Bernoulli ne s'applique pas exactement comme dans l'éq. (5.67) : on doit aussi tenir compte de l'énergie interne  $\varepsilon_{\text{int.}}$ . Cependant, l'effet va dans le même sens que pour un fluide incompressible.

Notons que l'équation (5.67) nous permet de retrouver le résultat (4.38) sans effort, en posant  $v = 0$  pour un fluide statique :

$$P + \varepsilon_g = \text{cte} = P - \rho g h = P(0) \quad (5.72)$$

## F Énergie de plusieurs objets en interaction

Jusqu'ici nous n'avons discuté que de l'énergie potentielle d'une particule en mouvement dans un champ de force créé par d'autres particules que nous supposons fixes. Il s'agit d'une approximation valable quand ces autres particules sont très massives en comparaison de la particule étudiée. La loi de conservation de l'énergie peut donc nous sembler fragile, car lorsqu'une particule se déplace dans le champ de force d'autres particules, ces dernières ne sont généralement pas fixes, mais se déplacent, notamment en raison de leurs influences mutuelles et de l'influence de la particule étudiée. Le champ de force  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  dépend donc du temps, ce qui invalide la relation (5.14) et la conservation de l'énergie.

Cependant, ce souci est injustifié. Il est vrai que les résultats de la section 5.B ne sont corrects que si le champ de force  $\mathbf{F}$  est fixe, c'est-à-dire s'il ne dépend pas explicitement du temps, mais seulement de la position de la particule. Cependant, on peut facilement généraliser la définition de l'énergie potentielle pour tenir compte du mouvement de plusieurs particules en interaction mutuelle. Pour cela, il est utile d'introduire la notion d'*espace des configurations*. Étant donné un ensemble de  $N$  particules à des positions  $\mathbf{r}_i$ , cet espace est de dimension  $3N$  et ses  $3N$  coordonnées sont les composantes  $(x_i, y_i, z_i)$  des  $N$  particules.

Par définition, si la force est conservative, alors la force  $\mathbf{F}_i$  s'exerçant sur la particule  $i$  est (moins) le gradient d'un potentiel  $U$  qui dépend en général des  $N$  coordonnées  $\mathbf{r}_i$  :

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (5.73)$$

Cette notation signifie qu'on prend les dérivées partielles de la fonction  $U$  par rapport aux coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$  de la  $i^{\text{ème}}$  particule pour obtenir les composantes de la force agissant sur cette même particule. L'énergie totale des particules est alors définie comme

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2 + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (5.74)$$

La preuve de la conservation de l'énergie se fait comme auparavant, c'est-à-dire en calculant sa dérivée par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2 + \frac{d}{dt} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot (m \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) = 0 \end{aligned} \quad (5.75)$$

où on a supposé que la force totale agissant sur la  $i^{\text{ème}}$  particule est la somme de la force conservative  $\mathbf{F}_i$ , de forces de contrainte ou magnétiques, perpendiculaires à la vitesse de chaque particule. Il est important de noter que si l'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques des particules du système, il n'en va pas de même de l'énergie potentielle en général.

**Exemple 5.6**

Considérons deux masses, de positions  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ , reliées par un ressort dont la longueur à l'équilibre est pratiquement nulle. L'énergie potentielle est alors proportionnelle au carré de la distance entre les deux masses, soit le carré de l'étirement du ressort :

$$U = \frac{1}{2} k (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = \frac{1}{2} k [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2] \quad (5.76)$$

où  $k$  est la constante du ressort. La force agissant sur la masse 1 est

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \mathbf{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y_1} \mathbf{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z_1} \mathbf{e}_z = -k [(x_1 - x_2) \mathbf{e}_x + (y_1 - y_2) \mathbf{e}_y + (z_1 - z_2) \mathbf{e}_z] = -k (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (5.77)$$

Cette force est parallèle à la droite reliant les deux masses et est dirigée vers la masse 2. La force agissant sur la masse 2 est exactement opposée, ce qui se manifeste directement dans le calcul des dérivées :

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \mathbf{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y_2} \mathbf{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z_2} \mathbf{e}_z = +k [(x_1 - x_2) \mathbf{e}_x + (y_1 - y_2) \mathbf{e}_y + (z_1 - z_2) \mathbf{e}_z] = k (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (5.78)$$

**Exemple 5.7**

Considérons l'énergie potentielle de  $N$  particules de masses  $m_i$  en interaction gravitationnelle mutuelle :

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (5.79)$$

La somme est effectuée sur toutes les paires (distinctes) de particules, d'où l'expression  $i < j$  sous le signe de sommation. Pour  $N$  particules, il y a  $\frac{1}{2} N(N-1)$  termes dans cette somme. La force exercée sur la particule  $i$  est alors

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \\ &= -G \sum_{j (j \neq i)} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \mathbf{e}_{rij} \\ &= -G \sum_{j (j \neq i)} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \end{aligned} \quad (5.80)$$

(dans cette équation, la somme est effectuée sur toutes les particules différentes de  $i$ , c'est-à-dire  $N-1$  termes).

## 5.F.1 Théorème travail-énergie dans le cas d'un système de particules

Le théorème travail-énergie dans le cas d'un système de particules peut être énoncé comme suit, si seules des forces conservatives ou de contrainte sont à l'oeuvre à l'intérieur du système

**Théorème 5.2 Travail-énergie**

Le travail des forces externes au système est égal au changement d'énergie du système :

$$\Delta E = W \quad (5.81)$$

Il est sous-entendu ici que  $W$  désigne le travail des forces externes seulement.

**Preuve:** Désignons par  $\mathbf{F}_i$  la force totale s'exerçant sur la particule no  $i$  du système. Cette force est la somme d'une force externe et de forces internes au système, causées par toutes les autres particules appartenant au système :  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext.}} + \mathbf{F}_i^{\text{int.}}$ . On supposera bien sûr que toutes les forces internes dérivent d'un énergie potentielle interne  $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ ,

de sorte que

$$\mathbf{F}_i^{\text{int.}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (5.82)$$

Le travail total effectué sur le système est

$$\begin{aligned} W_{\text{tot.}} &= \sum_i \int d\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i \\ &= \sum_i \int d\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i^{\text{ext.}} + \sum_i \int d\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i^{\text{int.}} \\ &= W - \sum_i \int d\mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \\ &= W - \Delta U \end{aligned} \quad (5.83)$$

où  $\Delta U$  est la différence entre l'énergie potentielle de la configuration finale par rapport à la configuration initiale. Comme le travail total est toujours égal au changement d'énergie cinétique totale, on trouve bien le résultat annoncé, soit que  $\Delta K = W - \Delta U$ , ou encore  $\Delta E = W$ . L'hypothèse fondamentale ici est que les forces internes ne dépendent que des positions des particules du système. On peut bien sûr relaxer cette condition pour inclure des forces internes qui ne produisent aucun travail, telles les forces magnétiques.

## G

### Conservation de l'énergie et formes d'énergie

Nous venons de voir que si les forces mutuelles des différentes particules d'un système sont conservatives (ou perpendiculaires à la vitesse), alors il est possible de définir une énergie potentielle  $U$  telle que l'énergie totale du système

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2 + U \quad (5.84)$$

est conservée en l'absence de forces extérieures. C'est la loi de la conservation de l'énergie dans sa forme applicable à un système de particules. La conservation de l'énergie a une valeur universelle qui s'étend à toutes les interactions fondamentales connues et, par extension, à toutes les forces macroscopiques possibles, ces dernières dérivant des forces fondamentales (électromagnétique, forte, faible et gravitationnelle).

La subtilité qui a longtemps camouflé la loi de conservation de l'énergie est l'impossibilité de considérer l'énergie cinétique totale en fonction du seul mouvement *macroscopique* d'un objet. Dans l'agitation microscopique des atomes réside une énergie cinétique considérable, contribuant à l'*énergie interne* d'un objet. Ce n'est qu'au 19<sup>me</sup> siècle qu'on élaborait la théorie mécanique de la chaleur, c'est-à-dire qu'on réalisa que la chaleur passant d'un objet à un autre n'est pas une forme subtile de matière, mais plutôt un transport d'énergie cinétique et potentielle internes. C'est le physicien et physiologiste allemand Helmholtz qui répandit le plus l'idée de l'universalité de la conservation de l'énergie, en particulier chez les êtres vivants. La loi de conservation de l'énergie est considérée comme si solide, qu'on est allé jusqu'à postuler, à la fin des années 1920, l'existence d'une nouvelle particule (le neutrino) dans le but d'expliquer un phénomène nucléaire (la désintégration bêta) dans lequel l'énergie n'était en apparence pas conservée.

Lorsqu'un système n'est pas isolé, son énergie n'est généralement pas conservée, même si l'énergie du système *plus* celle de son environnement est conservée au total. En fait, si on désigne par  $W$  le *travail* qu'effectue sur le système l'ensemble des forces externes (causées par l'environnement) lors d'un certain processus, alors le théorème travail-énergie affirme que le changement d'énergie  $\Delta E$  du système est

$$\Delta E = W \quad (5.85)$$

Quand on l'applique aux systèmes macroscopiques qui peuvent échanger de la chaleur avec leur environnement, cette relation est écrite un peu différemment :

$$\Delta E = Q + W_{\text{mac.}} \quad (5.86)$$

où  $Q$  est la quantité de chaleur absorbée par le système et  $W_{\text{mac.}}$  est le travail exercé sur le système *par des forces macroscopiques seulement*, c'est-à-dire des forces associées au mouvement macroscopique de l'objet. On peut considérer, en quelque sorte, que la chaleur donnée au système est un travail *microscopique*, exercé par les molécules individuelles de l'environnement du système. Cette relation est la *première loi de la thermodynamique*.



## Problèmes

### Question 5.1

Nous avons démontré en cours que si un objet se déplace dans un champ de force conservatif, alors la relation  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  entraîne la conservation de l'énergie  $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\mathbf{r})$ . Mais la conservation de l'énergie dans un tel système est-elle en soit suffisante pour déterminer le mouvement? Autrement dit, une fois qu'on sait que  $E$  est constante, a-t-on encore besoin de  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  ou tout a-t-il été dit? Pour répondre à cette question, essayez d'imaginer un mouvement tel que l'énergie est conservée, mais que l'équation  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  n'est pas respectée. Pour fixer les idées, songez à un projectile se déplaçant sous l'influence de la gravité  $-mg\mathbf{e}_z$ .

### Problème 5.1

Supposons qu'on désire envoyer une sonde sur la Lune. Une fois que la fusée a quitté l'atmosphère terrestre, elle relâche la sonde qui doit être en mesure d'atteindre la Lune sans apport d'énergie, c'est-à-dire en vertu de sa seule vitesse de lancement. On supposera, pour simplifier, que la Lune et la Terre sont stationnaires et que l'objet ne subit que l'attraction gravitationnelle combinée de la Terre et de la Lune. On utilisera la notation suivante :  $M_T$  et  $M_L$  sont les masses de la Terre et de la Lune, respectivement.  $R_T$  et  $R_L$  sont les rayons de la Terre et de la Lune ( $R_T$  inclut le rayon de l'atmosphère terrestre). La distance Terre-Lune (centre à centre) est  $d$ . On introduit aussi les rapports  $\mu = M_L/M_T$ ,  $\rho = R_L/R_T$  et  $\Delta = d/R_T$ . Numériquement, on a  $\mu = 0,0123$ ,  $\rho = 0,271$  et  $\Delta = 60,2$ .

*Note* : dans chaque partie, ne calculez la valeur numérique de la quantité requise qu'à la toute fin de vos calculs, après avoir exprimé votre résultat complet en fonction des paramètres ci-haut.

**A** Pour atteindre la Lune, la sonde doit au moins atteindre un point, situé à une distance  $r_0$  du centre de la Terre, entre la Terre et la Lune, où l'énergie potentielle est maximale. Calculez  $r_0$  et exprimez votre réponse en fonction de  $d$  et  $\mu$  seulement et donnez-en une valeur numérique en tant que fraction de la distance Terre-Lune  $d$ .

**B** Oublions la Lune pour le moment. Quelle doit être la vitesse minimale de la sonde, en s'échappant de l'atmosphère terrestre, pour qu'elle puisse s'éloigner à l'infini? Cette vitesse est appelée *vitesse de libération* et notée  $v_{\text{lib}}$ . Donnez-en une valeur numérique, en km/s.

**C** Calculez la vitesse minimale que doit posséder la sonde en quittant l'atmosphère terrestre, pour parvenir jusqu'à la Lune, c'est-à-dire pour franchir le point déterminé en (a). Exprimez votre réponse en fonction de  $v_{\text{lib}}$  (trouvé en (b)), de  $\Delta$  et de  $\mu$  seulement. Donnez aussi une valeur numérique en km/s.

**D** Calculez la vitesse à laquelle la sonde frappe la surface lunaire, en supposant qu'elle ait été lancée à la vitesse minimale obtenue en (c). Exprimez votre réponse en fonction de  $v_{\text{lib}}$ ,  $\Delta$ ,  $\mu$  et  $\rho$  seulement.

### Problème 5.2

Une balle en caoutchouc rebondit sur le sol et perd une fraction  $1 - r$  de son énergie ( $0 < r < 1$ ) à chaque rebond. En supposant que  $r$  demeure constant même quand il ne reste que très peu d'énergie à la balle,

montrez que le temps nécessaire pour que la balle s'immobilise est fini et donné par

$$T = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{1 + \sqrt{r}}{1 - \sqrt{r}}.$$

### Problème 5.3

Considérez le champ de force suivant :

$$\mathbf{F} = -(2x + y)\mathbf{e}_x - (2y + x)\mathbf{e}_y$$

Trouvez, par essai et erreur, le potentiel  $U$  correspondant, s'il existe.

### Problème 5.4

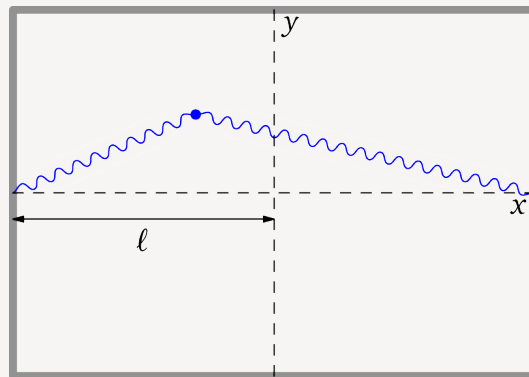
Une masse  $m$  est attachée à un cadre par deux ressorts identiques de constante  $k$ , tel qu'illustré. La longueur d'équilibre des ressorts est  $\ell_0$ , mais ils sont étirés à une longueur  $\ell > \ell_0$ , de sorte que la position d'équilibre de la masse est l'origine et qu'elle oscille autour de l'origine lorsqu'on la déplace légèrement dans une direction quelconque (le mouvement de cette oscillation est une figure compliquée en général).

**A** Montrez que l'énergie potentielle de cette particule, en fonction de  $x$  et  $y$ , a l'expression suivante quand  $x$  et  $y$  sont petits devant  $\ell$  et devant  $|\ell - \ell_0|$  :

$$U(x, y) \approx k(x^2 + r y^2) + \text{cte} \quad \text{où} \quad r \equiv 1 - \frac{\ell_0}{\ell}$$

Indice : vous devez calculer l'énergie potentielle emmagasinée dans chacun des ressorts, en calculant la longueur  $\ell(x, y)$  du ressort quand la particule est en position  $(x, y)$ , par rapport à la longueur d'équilibre  $\ell_0$ . L'énergie potentielle emmagasinée dans ce ressort est alors  $\frac{1}{2} k[\ell(x, y) - \ell_0]^2$ . Vous devez ensuite utiliser un développement de Taylor au deuxième ordre.

**B** À partir du résultat de (a), écrivez les équations différentielles du mouvement pour  $x$  et  $y$ . Quelle est leur solution générale?



**Problème 5.5**

Un pendule élastique est fait d'une masse  $m$  suspendue à un ressort de constante  $k$ . La longueur du ressort à l'équilibre et en l'absence de gravité est  $\ell$ . On place l'origine  $(x, z) = (0, 0)$  au point de suspension du ressort. On peut aussi décrire la position de la masse à l'aide des coordonnées  $(\rho, \varphi)$  (Attention : la relation entre  $(\rho, \varphi)$  et  $(x, z)$  n'est pas la même que d'habitude!) La masse est aussi sous l'influence de la gravité  $-g\mathbf{e}_z$ .

**A** Donnez une expression de l'énergie potentielle  $V(\rho, \varphi)$  de la masse, en fonction de  $\rho$  et  $\varphi$ , en tenant compte de l'énergie élastique du ressort et de l'énergie potentielle gravitationnelle.

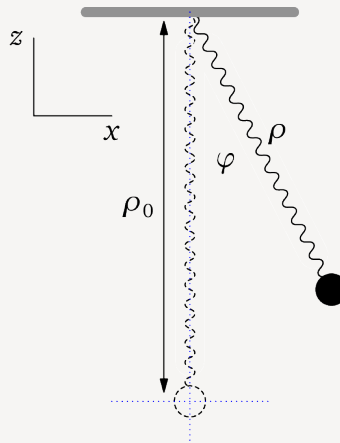
**B** À partir de  $V$ , calculez la force  $\mathbf{F}$  s'exerçant sur la masse et exprimez votre réponse en fonction des vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_z$ . Donnez une expression pour la position d'équilibre  $\rho_0$  du ressort.

**C** Supposez maintenant que la masse ne s'éloigne pas beaucoup de sa position d'équilibre. Définissons la coordonnée  $y = z + \rho_0$ , nulle à la position d'équilibre. Montrez que l'énergie potentielle peut alors s'écrire approximativement comme

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2) + \text{cte}$$

et donnez une expression pour les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction des paramètres  $m$ ,  $g$ ,  $k$  et  $\ell$ . Quelle limite faut-il imposer aux paramètres pour retrouver le cas d'un pendule ordinaire (sans ressort) ?

**D** Toujours dans l'approximation des petits déplacements par rapport à l'équilibre, écrivez les équations du mouvement pour  $x$  et  $y$  et donnez-en la solution générale, c'est-à-dire pour des conditions initiales quelconques. Si  $\alpha/\beta$  est un nombre irrationnel, à quoi ressemble l'ensemble des points visités par la masse après un temps suffisamment long? Vous pouvez utiliser un ordinateur pour faire un graphique de la trajectoire, ce qui vous aidera dans votre réflexion.

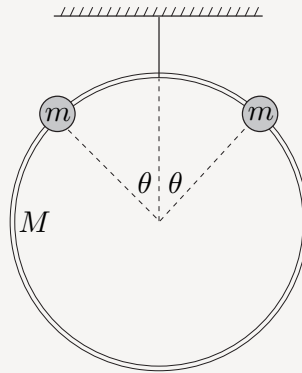
**Problème 5.6**

Un anneau de masse  $M$  est suspendu par un fil et deux billes de masse  $m$  sont libres de glisser sans friction le long de cet anneau. Les deux billes sont relâchées simultanément du sommet de l'anneau et glissent le long de l'anneau dans des directions opposées (voir figure). Montrez que l'anneau va s'élever à un moment

donné si  $m > \frac{3}{2}M$  et que l'angle  $\theta$  auquel cela se produira est donné par

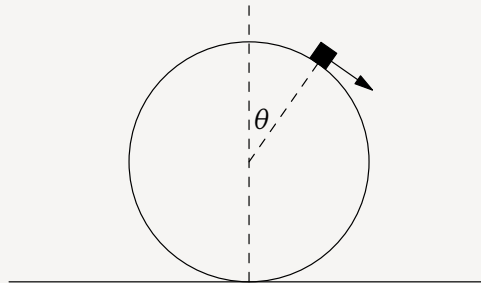
$$\cos \theta = \frac{1}{3} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{3M}{2m}} \right\}$$

Indice : l'anneau s'élève quand la force exercée par les deux billes sur l'anneau compense exactement la gravité. La force  $\mathbf{N}$  que l'anneau exerce sur chaque bille est égale et opposée à la force que chaque bille exerce sur l'anneau. Cette force  $\mathbf{N}$  contribue, avec la gravité, à la force centripète que chaque bille ressent.



### Problème 5.7

Une sphère est au repos, fixée sur le sol. Un objet est déposé au sommet de la sphère et glisse sur le côté, sous l'influence de la gravité. En supposant que le frottement entre l'objet et la surface de la sphère est négligeable, à quel angle  $\theta$  l'objet perd-il contact avec la surface de la sphère? Indice : Il est utile ici d'utiliser la conservation de l'énergie pour déterminer la vitesse de l'objet à un angle donné. On doit supposer que la sphère est fixe (immobile).



### Problème 5.8

Une fusée est en orbite elliptique autour de la Terre. On désire échapper à l'attraction de la Terre (atteindre une orbite parabolique) en allumant les moteurs, ce qui produit une différence de vitesse  $\Delta \mathbf{v}$ . À quel point de l'orbite et dans quelle direction devrait-on produire cette différence de vitesse pour minimiser  $|\Delta \mathbf{v}|$  et donc les coûts en carburant?

**Problème 5.9 Pression au coeur d'une planète liquide**

Une planète sphérique, de rayon  $R$ , est composée uniquement d'un liquide incompressible de densité volumique  $\rho$ . Exprimez la pression  $P(r)$  de ce liquide en fonction de la distance  $r$  au centre de la planète, en fonction de  $r$ ,  $R$ ,  $\rho$  et de la constante gravitationnelle  $G$ . Faites un graphique approximatif de la pression en fonction de  $r$ .

**Problème 5.10**

En raison de la forme aplatie de la Terre, le potentiel gravitationnel produit par la Terre possède une légère dépendance angulaire. On calcule approximativement que

$$V(r, \theta) = -G \frac{M_{\oplus}}{r} \left( 1 - C \frac{R_{\oplus}^2}{r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right)$$

où  $C \approx 5,4 \times 10^{-4}$  est une constante numérique,  $R_{\oplus}$  est le rayon équatorial moyen de la Terre et  $\theta$  est la coordonnée sphérique habituelle, mesurée à partir du pôle. Montrez que le champ gravitationnel comporte une petite composante dans la direction  $\mathbf{e}_{\theta}$ , sauf au pôle et à l'équateur. Calculez son importance relative (en pourcentage) par rapport à la composante radiale, à Sherbrooke ( $\theta = 45^\circ$ ).

**Problème 5.11**

On s'attend naturellement à ce que le champ gravitationnel terrestre  $g$  diminue lorsqu'on monte en altitude et aussi lorsqu'on descend dans un puits de mine.

**A** En supposant que la Terre est parfaitement sphérique, démontrez que le champ gravitationnel mesuré au sommet d'une tour de hauteur  $h$  devrait être

$$g(h) = g_0 \left( 1 - 2 \frac{h}{R_{\oplus}} \right)$$

**B** Démontrez que le champ gravitationnel mesuré au fond d'un puits de profondeur  $h$  devrait être

$$g(h) = g_0 \left( 1 + (2 - 3\rho_c/\bar{\rho}) \frac{h}{R_{\oplus}} \right)$$

où  $\rho_c$  est la densité (masse par unité de volume) de la croûte terrestre et  $\bar{\rho}$  est la densité moyenne de la Terre (prise sur tout son volume).

Ici,  $g_0$  est le champ gravitationnel mesuré à la surface de la Terre. Un développement de Taylor au premier ordre doit être effectué (on considère que  $r/R_{\oplus} \ll 1$ ).

**Problème 5.12**

Considérez une planète sphérique, d'une densité  $\rho$  uniforme et de rayon  $R$ . Quel est le champ gravitationnel à la surface de cette planète et comment varie-t-il en fonction de  $R$ ? En supposant qu'un satellite artificiel en orbite circulaire juste au-dessus de la surface ne soit pas gêné par une quelconque atmosphère, comment sa période orbitale  $T$  dépend-elle de  $R$ ?

**Problème 5.13**

Pour apprécier notre bonne vieille force de gravité qui décroît en l'inverse du carré de la distance, étudions ce qui se passerait si elle décroissait plutôt comme la quatrième puissance de la distance, c'est-à-dire supposons que la force entre deux masses ponctuelles  $m_1$  et  $m_2$  ait la forme suivante :

$$\mathbf{F} = -\frac{K m_1 m_2}{r_{12}^4} \mathbf{e}_{r_{12}}$$

où  $K$  est une constante.

**A** Quel est l'énergie potentielle associée à cette force?

**B** Reprenez le calcul effectué dans les notes de cours sur la force exercée par une coquille sphérique (section 5.C), mais cette fois adapté à la loi de force ci-haut. Calculez la force exercée par la coquille creuse de masse  $M$  sur une particule de masse  $m$ . Vous n'avez pas besoin de refaire tous les calculs des notes de cours, mais seulement ceux qui doivent être adaptés en raison du changement de loi de force.

**C** Peut-on dire dans ce cas que la coquille attire la particule comme si toute sa masse était concentrée en son centre? Expliquez.

**D** Calculez maintenant la force  $F(r)$  exercée sur une particule de masse  $m$  par une planète de rayon  $a$ , de densité uniforme et de masse  $M$ . Vous devez pour cela intégrer les contributions de coquilles ayant des rayons  $R$  variant de zéro à  $a$  (attention : les masses de ces différentes coquilles sont différentes, puisque c'est la densité  $\rho$  de la planète qui est supposée constante). On suppose que la particule est située à une distance  $r > a$  du centre de la planète. Faites un graphique de la force  $F(r)$  en fonction de  $r$ . Qu'y a-t-il d'insolite et d'inquiétant dans cette force? Une telle planète pourrait-elle être stable? Expliquez.

Note : l'intégrale suivante sera utile

$$\int \frac{R^2(3r^2 - R^2)}{(r^2 - R^2)^2} dR = \frac{R^3}{r^2 - R^2}$$

**Problème 5.14**

L'une des grandes questions de la cosmologie (l'étude de l'évolution de l'Univers) est de savoir si l'Univers est fermé ou ouvert, c'est-à-dire si son expansion s'arrêtera un jour ou si elle se poursuivra indéfiniment. Tout dépend de la densité moyenne  $\rho$  de l'Univers : si cette densité est plus grande qu'une valeur critique  $\rho_c$ , l'attraction gravitationnelle que les différentes galaxies exercent les unes sur les autres sera trop grande pour permettre une expansion éternelle et l'Univers retombera éventuellement sur lui-même. Même si une discussion correcte de la question doit se faire dans le contexte de la théorie de la relativité générale, nous tenterons ici de déterminer la densité critique  $\rho_c$  à l'aide de données observées et des lois de la mécanique classique dans le cadre d'un modèle simplifié. Considérons l'Univers comme une sphère en expansion de masse  $M$  constante et de rayon  $R$  augmentant avec le temps. L'expansion de cette sphère est décrite par la loi de Hubble, c'est-à-dire que la vitesse d'expansion d'une galaxie située à une distance  $r$  du centre de la sphère est proportionnelle à cette distance :  $v = Hr$ , où  $H$  est la constante de Hubble. Considérez une galaxie située à la surface de cette sphère de rayon  $R$ .

**A** Montrez que l'énergie totale (cinétique + gravitationnelle) de cette galaxie est

$$E = mR^2\left(\frac{1}{2}H^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho\right)$$

où  $\rho$  est la densité *moyenne* de l'Univers.

**B** L'Univers sera *ouvert* si cette galaxie est libre et *fermé* si elle est liée. Montrez que la densité critique de l'Univers est

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

**C** Calculez cette densité critique, en sachant que  $H \sim 2,3 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ . Calculez le nombre de protons que cela représente par  $\text{m}^3$ .

### Problème 5.15

Un objet se déplace en dimension 1 dans le potentiel suivant :  $U(x) = U_0(x^2 - x_0^2)^2$ , où  $U_0$  et  $x_0$  sont des constantes positives. Faites un graphique approximatif de ce potentiel, identifiez les positions d'équilibre stable et instable, ainsi que la direction de la force dans chacun des domaines où la force est non-nulle.

### Problème 5.16

L'interaction entre deux atomes neutres est souvent décrite par le potentiel de Lennard-Jones :

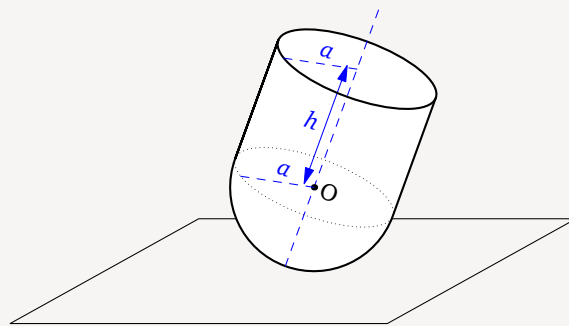
$$U(r) = U_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$$

où  $r_0$  est une constante ayant les unités d'une longueur et  $U_0$  une constante ayant les unités de l'énergie.

(i) Trouvez la position d'équilibre stable dans ce potentiel et (ii) la fréquence des petites oscillations lorsqu'une particule est très proche du point d'équilibre stable, en procédant à un développement de Taylor au 2e ordre autour de ce point.

### Problème 5.17

Un objet rigide homogène a la forme suivante : un hémisphère de rayon  $a$ , sur lequel est collé un cylindre de rayon  $a$  et de hauteur  $h$ . Démontrez que cet objet peut être en équilibre stable sur un plan seulement si  $a > h\sqrt{2}$ .



**Problème 5.18**

Un satellite de masse  $m$  est en orbite circulaire de rayon  $r$  autour de la Terre. Comme son orbite est basse, la haute atmosphère exerce une force de frottement sur le satellite. Pour simplifier les choses, supposons que cette force  $f$  est constante. Cet exercice vise à démontrer que l'effet de cette force n'est pas de ralentir le satellite, mais de l'accélérer! On doit supposer ici que  $f$  est suffisamment faible de sorte que l'orbite du satellite est toujours circulaire en première approximation, mais que le rayon  $r$  de cette orbite diminue lentement, de  $\Delta r$  par révolution.

**A** Montrez que l'énergie totale du satellite est  $E = -GMm/2r$ .

**B** Montrez, à l'aide du théorème travail-énergie, que la variation d'énergie totale après une révolution est  $\Delta E = -2\pi r f$  et que

$$\Delta r = -\frac{4\pi r^3 f}{GMm}$$

**C** Montrez que la variation d'énergie cinétique est  $\Delta K = +2\pi r f$  (le signe est positif).



## CHAPITRE 6

# CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

La loi de conservation de la quantité de mouvement est une conséquence immédiate de la troisième loi de Newton : comme expliqué à la page 34, si un système est isolé, donc s'il ne ressent aucune force externe, sa quantité de mouvement totale est constante dans le temps. Nous allons étudier dans ce chapitre les conséquences de ce principe sur des processus de collisions de particules ou d'objets macroscopiques, sans avoir besoin de connaître précisément la nature des forces en présence.

### A

#### Collisions élastiques

Considérons deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$  qui se déplacent initialement à des vitesses  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ . On suppose que ces particules exercent une force l'une sur l'autre, mais que cette force a une portée très courte, de sorte qu'elles se meuvent librement la plupart du temps, sauf quand elles entrent en *collision*, c'est-à-dire quand elles s'approchent très près l'une de l'autre. Nous ne nous soucierons pas des détails de la force s'exerçant entre ces deux particules, car ce qui nous intéresse ici est la relation entre les vitesses de ces particules *après* la collision et *avant* la collision et non le mouvement détaillé des particules *pendant* la collision.

On supposera que le processus de collision est *élastique*, c'est-à-dire que l'énergie cinétique des particules est la même avant et après la collision. Ceci implique qu'aucune autre particule n'est créée lors de la collision et que l'énergie interne des particules n'est pas modifiée. Dans le cas contraire, la collision est dite *inélastique*. En réalité, les collisions entre objets macroscopiques (par ex. des boules de billard) sont toujours inélastiques, car une certaine fraction de l'énergie est perdue en chaleur. Des collisions inélastiques se produisent aussi aux niveaux atomique et nucléaire si les particules (atomes, noyaux, etc.) émergent de la collision dans un état excité ou si de la lumière ou des particules supplémentaires sont émises pendant la collision.

FIGURE 6.1

Collision unidimensionnelle de deux particules. Dans le référentiel du laboratoire, la particule 2 est au repos avant la collision. À droite, on se place dans le référentiel du centre de masse.



### 6.A.1 Collision en une dimension

Pour commencer, considérons le cas où les deux objets qui entrent en collision ne se déplacent que dans une seule direction (voir la Fig. 6.1). C'est un cas particulier d'une collision plus générale qu'on étudiera plus bas. On suppose que le premier objet se déplace initialement à une vitesse  $\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{e}_x$  et que le second objet est au repos ( $v_2 = 0$ ). Après la collision, les deux objets ont respectivement des vitesses  $\mathbf{v}'_1 = v'_1 \mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{v}'_2 = v'_2 \mathbf{e}_x$ . Le problème est de déterminer précisément  $v'_1$  et  $v'_2$  en fonction de  $v_1$  et des masses des deux objets. Il y a deux façons de résoudre ce problème : (i) utiliser immédiatement les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie ; (ii) se déplacer d'abord dans le référentiel du centre de masse, y utiliser les lois de conservation et ensuite revenir au référentiel du laboratoire. Quoique la deuxième façon semble plus longue à première vue, elle est en fait plus simple. Nous allons cependant les expliquer toutes les deux.

Dans la première façon, on applique les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \quad (6.1)$$

Il s'agit de deux équations, pour deux inconnues ( $v'_1$  et  $v'_2$ ). On élimine  $v'_2$  à l'aide de la première équation, pour obtenir

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \left( v'^2_1 + \frac{m_1}{m_2} (v_1 - v'_1)^2 \right) \quad (6.2)$$

Il s'agit d'une équation quadratique pour  $v'_1$  qui peut être résolue par la formule standard. On peut la récrire comme suit :

$$(v'_1)^2 (m_1 + m_2) - 2 m_1 v_1 v'_1 + (m_1 - m_2) v_1^2 = 0 \quad (6.3)$$

La formule de solution de l'équation quadratique nous donne

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{1}{m_1 + m_2} \left( m_1 v_1 \pm v_1 \sqrt{m_1^2 - (m_1 + m_2)(m_1 - m_2)} \right) \\ &= \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Le signe supérieur donne  $v'_1 = v_1$ , ce qui correspond à l'absence de collision. Le signe inférieur donne plutôt

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{et} \quad v'_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (6.5)$$

(nous avons utilisé la première des éq (6.1) pour exprimer  $v'_2$  en fonction de notre solution pour  $v'_1$ ). Notons que le discriminant de l'équation quadratique est un carré parfait, ce qui laisse penser que cette solution n'est pas la plus simple qu'on aurait pu trouver.

Expliquons maintenant la deuxième façon, plus pratique (surtout quand on étudie le même problème en deux dimensions). Le centre de masse du système des deux objets se déplace à vitesse constante avant, pendant et après la collision, car aucune force externe n'agit sur le système. On peut donc se déplacer dans le référentiel du centre de masse, car ce référentiel est inertiel et les lois de conservation y sont tout aussi valables que dans le référentiel du laboratoire. Dans le cas qui nous occupe, la vitesse du centre de masse (3.3) se calcule d'après les données d'avant la collision,

$$V_{\text{cm}} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (6.6)$$

La relation entre la vitesse  $\mathbf{v}$  d'une particule dans le référentiel du laboratoire et la vitesse  $\mathbf{u}$  de la même particule dans le référentiel du centre de masse est donnée par la transformation de Galilée (2.63) :  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$

(ici  $V = V_{\text{cm}}$ ), ce qui donne

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 - V \\ u_2 &= v_2 - V \\ u'_1 &= v'_1 - V \\ u'_2 &= v'_2 - V \end{aligned} \quad \text{où} \quad V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (6.7)$$

L'utilité du référentiel du centre de masse est que la quantité de mouvement totale  $M_{\text{tot}} V_{\text{cm}}$  du système y est nulle, car dans ce référentiel la vitesse du centre de masse est nulle par définition. L'équation de conservation de la quantité de mouvement est alors plus simple :

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0 = m_1 u'_1 + m_2 u'_2 \quad (6.8)$$

On en déduit que  $u_2 = -(m_1/m_2)u_1$  et  $u'_2 = -(m_1/m_2)u'_1$ . Si on insère ces relations dans la loi de conservation de l'énergie, on trouve

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u_1'^2 \quad (6.9)$$

On en déduit que  $|u_1| = |u'_1|$  et donc que  $|u_2| = |u'_2|$ . C'est un résultat important : dans le référentiel du centre de masse, les grandeurs des vitesses des particules ne changent pas lors de la collision.

En une dimension, deux cas se présentent : soit  $u'_1 = u_1$ , ou  $u'_1 = -u_1$ . Dans le premier cas, il n'y a tout simplement pas de collision et devons donc considérer le deuxième cas seulement. On peut ensuite retourner au référentiel du laboratoire :

$$\begin{aligned} v'_1 &= u'_1 + V = -u_1 + V = -v_1 + 2V \\ v'_2 &= u'_2 + V = -u_2 + V = -v_2 + 2V \end{aligned} \quad (6.10)$$

En substituant les valeurs connues, on trouve

$$v'_1 = -v_1 + 2 \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{et} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1, \quad (6.11)$$

la même solution trouvée plus haut.

Remarquons maintenant quelques caractéristiques de cette solution.

- Si  $m_2 \gg m_1$ , alors  $v'_1 \approx -v_1$  et  $v'_2 \approx 0$ . La première particule rebondit sur la deuxième comme sur un mur.
- Si, au contraire,  $m_2 \ll m_1$ , alors  $v'_1 \approx v_1$  et  $v'_2 \approx 2v_1$ . La deuxième particule est comme projetée par la première, comme si un mur en mouvement l'avait frappée.
- Si  $m_1 = m_2$ , alors  $v'_1 = 0$  et  $v'_2 = v_1$  : il y a eu simple substitution des objets. Une telle substitution conserve évidemment la quantité de mouvement et l'énergie, si les masses sont égales.

## 6.A.2 Collision en deux dimensions : angle de diffusion

Nous allons maintenant généraliser les calculs précédents au cas d'une collision en deux dimensions. Le deuxième objet est encore au repos avant la collision, mais les deux objets sont déviés hors de l'axe des  $x$  après la collision, comme sur la Fig. 6.2. L'angle que fait la vitesse du premier objet par rapport à la direction initiale de son mouvement est appelé *angle de diffusion*<sup>1</sup>. Cet angle dépend de la forme précise de la force qui agit

1. Le processus de collision porte aussi le nom de diffusion en physique microscopique, en raison de la dualité onde-corpuscule : la collision avec une cible au repos est en effet l'analogie de la diffusion d'une onde sur un obstacle.

entre les deux objets, ainsi que de la distance entre la cible et l'axe de la vitesse du projectile; cette distance, notée  $b$ , est appelée *paramètre d'impact*. Notons que le problème n'est pas différent en trois dimensions : les vitesses des objets après la collision déterminent un plan, et ce plan contient aussi la vitesse du projectile avant la collision, car il contient la quantité de mouvement totale des deux objets. C'est dans ce plan que nous travaillons, la troisième dimension n'intervenant pas.

FIGURE 6.2

Vitesses des particules avant et après une collision, dans le référentiel du laboratoire : la particule 2 est initialement au repos ( $\mathbf{v}_2 = 0$ ).

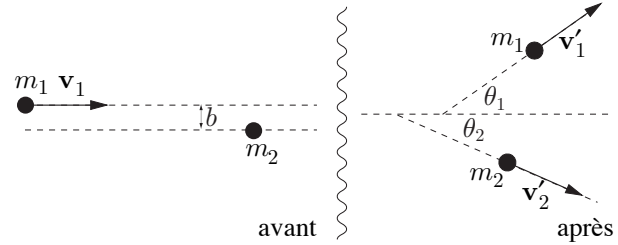
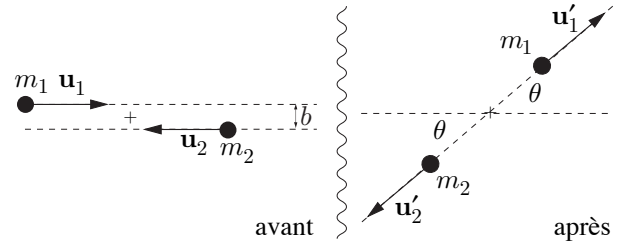


FIGURE 6.3

Vitesses des particules avant et après une collision, dans le référentiel du centre de masse.



Dans le repère du centre de masse, la collision est plus simple (Fig. 6.3). Soit  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  les vitesses des deux particules avant la collision dans ce référentiel, et  $\mathbf{u}'_1$  et  $\mathbf{u}'_2$  les vitesses des mêmes objets après la collision. Comme la quantité de mouvement totale est nulle dans ce repère, on trouve  $0 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = m_1 \mathbf{u}'_1 + m_2 \mathbf{u}'_2$ , de sorte que  $\mathbf{u}_2$  est antiparallèle à  $\mathbf{u}_1$ , et  $\mathbf{u}'_2$  est antiparallèle à  $\mathbf{u}'_1$ . Les deux objets se déplacent donc le long d'un axe commun avant la collision (mais en sens contraire), et le long d'un autre axe commun après la collision, ces deux axes sous-tendant un angle  $\theta$ . L'angle  $\theta$  est déterminé par le paramètre d'impact ainsi que par la loi de force précise qui relie les deux objets. Il peut en principe prendre toutes les valeurs entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

Par contre, les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ne sont pas nécessairement libres de prendre toutes les valeurs. Donnons-nous comme problème de déterminer l'angle de diffusion  $\theta_1$  maximum, en supposant que  $m_1 > m_2$ . Il est évident que, dans le cas contraire ( $m_1 < m_2$ ) il est toujours possible pour la particule 1 d'être *rétro diffusée*, c'est-à-dire de 'rebondir' vers son point de départ. Au contraire, si  $m_2 < m_1$ , l'angle de diffusion  $\theta_1$  ne peut pas excéder un certain maximum (ceci est clair dans la limite  $m_1 \gg m_2$ , car un objet massif ne peut pas être beaucoup dévié par un objet léger).

Pour ce faire, le plus simple est d'effectuer une transformation galiléenne vers le référentiel  $S'$  du centre de masse. On répète alors facilement les calculs précédents :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{V} & \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{u}'_1 + \mathbf{V} & \mathbf{V} &= \frac{m_1 \mathbf{v}_1}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 + \mathbf{V} = \mathbf{0} & \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{u}'_2 + \mathbf{V} \end{aligned} \quad (6.12)$$

À partir de ces équations on trouve une expression explicite pour les vitesses  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \quad (6.13)$$

Appliquons maintenant les lois de conservation. Avant et après la collision, l'impulsion totale est nulle dans le repère du centre de masse :

$$m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = 0 = m_1 \mathbf{u}'_1 + m_2 \mathbf{u}'_2 \quad (6.14)$$

Les deux particules s'éloignent donc du lieu de la collision dans des directions exactement opposées, faisant un angle  $\theta$  avec la direction initiale des vitesses (cf. Fig. 6.3). Comme dans le cas unidimensionnel, on conclut de la conservation de l'énergie que les grandeurs des vitesses sont les mêmes après et avant la collision et que seules les directions changent :  $u_1 = u'_1$  et  $u_2 = u'_2$ .

On peut ensuite trouver la relation entre l'angle de diffusion  $\theta$  dans le référentiel  $S'$  et l'angle de diffusion  $\theta_1$  dans le repère  $S$  :

$$\tan \theta_1 = \frac{v'_{1y}}{v'_{1x}} = \frac{u'_{1y}}{u'_{1x} + V} = \frac{u'_1 \sin \theta}{u'_1 \cos \theta + V} = \frac{u_1 \sin \theta}{u_1 \cos \theta + V} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + V/u_1} \quad (6.15)$$

Nous avons utilisé dans ces égalités les composantes  $x$  et  $y$  des éq. (6.12). Comme

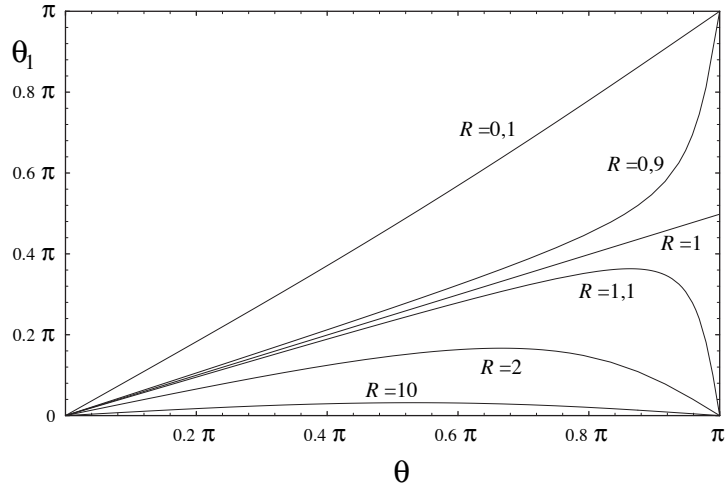
$$u_1 = v_1 - V = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_2}{m_1} V \quad (6.16)$$

on trouve finalement

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{m_1}{m_2}} \quad (6.17)$$

**FIGURE 6.4**

Angle de diffusion  $\theta_1$  dans le référentiel du laboratoire en fonction de l'angle de diffusion  $\theta$  dans le référentiel du centre de masse. On montre la dépendance pour cinq valeurs différentes du rapport  $R = m_1/m_2$ . On note qu'il existe un angle  $\theta_1$  maximum si  $R > 1$ .



Si la particule 1 est plus massive que la particule 2, l'angle de diffusion  $\theta_1$  atteint sa valeur maximale  $\theta_1^{\max}$  pour une certaine valeur  $\theta_0$  de  $\theta$  (cf. Fig. 6.4). La position exacte de ce maximum s'obtient par différentiation :

$$0 = \frac{d}{d\theta} \tan \theta_1 \Big|_{\theta=\theta_0} = \frac{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_0}{\left(\cos \theta_0 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2} \Rightarrow \cos \theta_0 = -\frac{m_2}{m_1} \quad (6.18)$$

et ensuite

$$\tan \theta_1^{\max} = \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 + \frac{m_1}{m_2}} = -\frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 - 1}} \quad (6.19)$$

ce qui revient à dire

$$\sin \theta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1} = -\cos \theta_0 \quad (6.20)$$

Si, au contraire, la particule 1 est plus légère que la particule 2, alors le dénominateur de l'expression (6.17) devient négatif si  $-1 < \cos \theta < -m_1/m_2$ . Dans ces circonstances,  $\tan \theta_1$  est aussi négatif et donc  $\frac{1}{2}\pi < \theta_1 < \pi$ . Dans la limite où  $\theta = \pi$ ,  $\tan \theta_1 \rightarrow 0^-$  et  $\theta_1 = \pi$ . l'angle de diffusion maximum  $\theta_1^{\max}$  est donc égal à  $\pi$  (cf. Fig. 6.4).

### 6.A.3 Cas de masses égales

Dans le cas limite où  $m_1 = m_2$ , on a

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \quad (m_1 = m_2) \quad (6.21)$$

Or, il se trouve que

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} = \tan \frac{\theta}{2} \quad (6.22)$$

(cette formule se démontre aisément en appliquant les formules d'angles doubles :

$$\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \quad \cos \theta = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$$

La relation entre  $\theta$  et  $\theta_1$  est donc particulièrement simple dans ce cas :

$$\theta_1 = \frac{\theta}{2} \quad (-\pi < \theta < \pi) \quad (6.23)$$

L'angle de diffusion maximum est obtenu quand  $\theta = \pi$ , qui correspond à  $\theta_1^{\max} = \pi/2$ .

Ceci est applicable au cas de deux boules de billard, si on néglige les effets du tapis et de rotation des boules – ce qu'un vrai joueur de billard ne saurait faire. On ne peut pas faire 'rebondir' une boule sur une autre. Le mieux qu'on puisse espérer est que la boule projetée sur l'autre émerge à un angle  $\theta_1$  proche de  $\pi/2$ . Dans ce cas, sa vitesse est assez faible (elle tend vers zéro quand  $\theta_1 \rightarrow \pi/2$ ).

On démontre par ailleurs sans difficulté que les vitesses  $\mathbf{v}'_1$  et  $\mathbf{v}'_2$  sont perpendiculaires entre elles dans le cas de deux objets de masses identiques ( $m_1 = m_2 = m$ ) et d'une collision élastique. La preuve est très simple : écrivons pour ce cas les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique :

$$m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}'_1 + m\mathbf{v}'_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}'_1)^2 + \frac{1}{2}m(\mathbf{v}'_2)^2 \quad (6.24)$$

Simplifions les masses et les facteurs  $\frac{1}{2}$  partout et mettons la première équation au carré :

$$\mathbf{v}_1^2 = (\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2)^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_1^2 = (\mathbf{v}'_1)^2 + (\mathbf{v}'_2)^2 \quad (6.25)$$

En développant le carré de l'équation de gauche et en comparant avec celle de droite, on trouve que

$$\boxed{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2} = 0 \quad (6.26)$$

ce qui démontre bien que les deux vitesses sont perpendiculaires (ce qui comprend la possibilité que l'une des deux vitesses soit nulle).

D'autre part, on montre facilement que

$$\boxed{v'_2 = v_1 \cos \theta_2 \quad \text{et} \quad v'_1 = v_1 \cos \theta_1} \quad (6.27)$$

sachant bien sûr que  $\cos \theta_2 = \sin \theta_1$  puisque que  $\theta_2 = \frac{1}{2}\pi - \theta_1$ . La démonstration est la suivante : comme  $\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2 = 0$ , alors

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_2 = (\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2) \cdot \mathbf{v}'_2 = (\mathbf{v}'_2)^2 \quad (6.28)$$

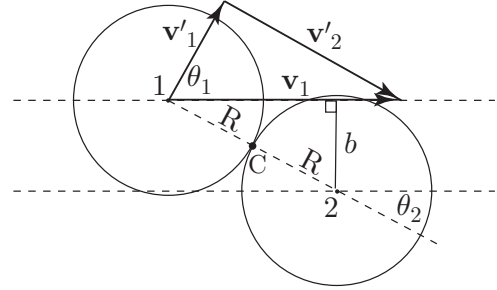
D'autre part, ce produit scalaire vaut  $v_1 v'_2 \cos \theta_2$ , et donc  $v'_2 = v_1 \cos \theta_2$ , tel qu'annoncé. La deuxième relation se démontre pareillement :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_1 = (\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2) \cdot \mathbf{v}'_1 = (\mathbf{v}'_1)^2 \quad (6.29)$$

ce qui vaut aussi  $v_1 v'_1 \cos \theta_1$ , ce qui permet d'écrire que  $v_1 \cos \theta_1 = v'_1$ .

**FIGURE 6.5**

Collision de deux sphères dures. La force appliquée sur la sphère 2 est dans la direction de la vitesse  $\mathbf{v}'_2$ , et le paramètre d'impact  $b$  est relié simplement à l'angle  $\theta_2$  :  $\sin \theta_2 = b/2R$ .



### Exemple 6.1 Collision de sphères dures

Étudions enfin un exemple précis de collision où la relation entre le paramètre d'impact et l'angle de diffusion peut être établie. Considérons deux sphères dures de mêmes masses, telles des boules de billard, qui entrent en collision. On supposera que la force qui agit entre les deux boules est dirigée le long de l'axe qui relie les centres des deux boules. Ceci revient à négliger tout effet de frottement entre les surfaces des boules, frottement qui pourrait communiquer à la boule cible un mouvement de rotation sur elle-même. On indique sur la figure 6.5 la direction des vitesses avant et après la collision, les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , ainsi que le paramètre d'impact  $b$ . La relation entre ce dernier, le rayon  $R$  des sphères et l'angle  $\theta_2$  est très simple :  $\sin \theta_2 = b/2R$ . Ceci vient du fait que la quantité de mouvement  $m\mathbf{v}'_2$  de la cible après la collision provient de l'application sur un temps extrêmement court d'une force très intense exercée au point de contact C des deux sphères et dirigée suivant la droite qui relie les deux centres. Cette droite est donc parallèle à  $\mathbf{v}'_2$ . La relation

$$\cos \theta_1 = \sin \theta_2 = \frac{b}{2R} \quad (6.30)$$

combinée à la relation (6.27), nous permet de calculer les angles et les vitesses  $v'_1$  et  $v'_2$  en fonction du paramètre d'impact  $b$ .

## B Théorème de König et collisions inélastiques

Une collision est qualifiée d'inélastique si l'énergie mécanique des objets en collision n'est pas conservée. Si le système composé des deux particules est isolé, il y a tout de même conservation de la quantité de mouvement totale. Dans le but de mieux comprendre les facteurs limitant la perte d'énergie lors d'une collision inélastique, nous allons premièrement énoncer et démontrer le premier théorème de König, portant sur l'énergie cinétique d'un ensemble de particules.

### 6.B.1 Premier théorème de König

#### Théorème 6.1 König I

L'énergie cinétique totale d'un système est la somme de deux termes : l'énergie cinétique associée au centre de masse et l'énergie cinétique du système par rapport à son centre de masse, ou *énergie cinétique interne* ( $K_{\text{int.}}$ ) :

$$K_{\text{tot.}} = \frac{1}{2} M_{\text{tot}} \mathbf{V}_{\text{cm}}^2 + K_{\text{int.}} \quad K_{\text{int.}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i)^2 \quad (6.31)$$

où  $\mathbf{v}'_i$  est la vitesse de la  $i^{\text{e}}$  particule du système par rapport au centre de masse et  $\mathbf{V}_{\text{cm}}$  est la vitesse du centre de masse du système.

**Preuve:** Ce théorème se prouve facilement en effectuant une transformation galiléenne vers le référentiel du centre de masse :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V}_{\text{cm}} + \mathbf{v}'_i \quad (6.32)$$

alors

$$\begin{aligned} K_{\text{tot.}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V}_{\text{cm}} + \mathbf{v}'_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V}_{\text{cm}}^2 + \mathbf{V}_{\text{cm}} \cdot \left( \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \right) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i)^2 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Le deuxième terme du membre de droite s'annule, car l'expression entre parenthèses est la quantité de mouvement totale du système dans le référentiel du centre de masse, c'est-à-dire zéro. Il reste donc le résultat (6.31).

Expliquons : l'énergie cinétique d'un système dépend bien sûr du référentiel d'observation. Le théorème de König affirme que l'énergie cinétique est minimale et égale à  $K_{\text{int.}}$  lorsqu'on l'évalue dans le référentiel du centre de masse et que, dans tout autre référentiel, on doit ajouter à cette valeur minimum un terme  $\frac{1}{2} M_{\text{tot}} \mathbf{V}_{\text{cm}}^2$  qui ne dépend que du mouvement du centre de masse et de la masse totale du système (ce terme est donc indépendant du détail du mouvement interne du système). Si le système est isolé (c'est-à-dire si aucune force externe n'agit sur lui) alors la vitesse  $\mathbf{V}_{\text{cm}}$  de son centre de masse est constante et l'énergie cinétique  $\frac{1}{2} M_{\text{tot}} \mathbf{V}_{\text{cm}}^2$  associée au centre de masse est constante. Cependant, l'énergie cinétique interne  $K_{\text{int.}}$  n'est pas nécessairement constante et peut se changer en énergie potentielle interne, se dissiper en chaleur, etc.

### 6.B.2 Variation de l'énergie interne

Lors d'une collision inélastique, l'énergie associée au mouvement du centre de masse ( $\frac{1}{2} M_{\text{tot}} \mathbf{V}_{\text{cm}}^2$ ) est la même avant et après la collision, et donc la variation d'énergie provient entièrement de la variation d'énergie cinétique interne. Lors de collisions inélastiques d'objets macroscopiques, celle-ci se transforme partiellement (ou entièrement) en chaleur. Par contre, lors de collisions de particules à l'échelle atomique ou subatomique, l'énergie cinétique interne peut tantôt être transformée en masse (par l'équivalence relativiste entre masse et énergie) et servir à la création de particules nouvelles, tantôt augmentée par conversion d'une certaine quantité de masse en énergie.



**Exemple 6.2 Collision maximalement inélastique**

Un objet de masse  $m_1$  et de vitesse  $\mathbf{v}_1$  entre en collision avec un deuxième objet, de masse  $m_2$ , initialement au repos. Après la collision, supposons que les deux objets adhèrent l'un à l'autre, et se déplacent à une vitesse commune  $\mathbf{v}$ . Plaçons-nous premièrement dans le référentiel du laboratoire. La conservation de la quantité de mouvement nous dit que

$$m_1 \mathbf{v}_1 = (m_1 + m_2) \mathbf{v} \implies v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (6.34)$$

Par contre, l'énergie n'est manifestement pas conservée. Les énergies cinétiques initiale et finale sont

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad K_f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2 \quad (6.35)$$

et la perte d'énergie se lit dans le rapport  $K_f/K_i$  :

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1 + m_2/m_1} < 1 \quad (6.36)$$

Dans la limite où  $m_2 \gg m_1$ , on trouve

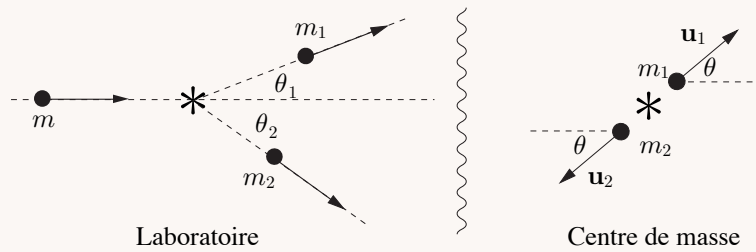
$$\frac{K_f}{K_i} \approx \frac{m_1}{m_2} \ll 1 \quad (m_2 \gg m_1) \quad (6.37)$$

C'est le cas notamment d'une météorite de masse  $m$  entrant en collision avec la Terre, vu du référentiel terrestre. Cela signifie que pratiquement toute l'énergie cinétique est dissipée en chaleur dans ce cas.

Étudions maintenant la même situation, cette fois dans le référentiel du centre de masse. Dans ce référentiel, les deux particules ont, avant la collision, des vitesses  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  données par l'éq. (6.13). Après la collision, les deux particules demeurent ensemble au repos, car l'impulsion totale est nulle dans ce référentiel. La perte d'énergie est alors beaucoup plus claire, car l'énergie cinétique est nulle après la collision : toute l'énergie interne a disparu. On dit alors que la collision est *maximalement inélastique*.

**Exemple 6.3 Processus de désintégration**

Le processus inverse d'une collision maximalement inélastique est celui d'une particule instable qui se brise en deux fragments. Vu du référentiel du centre de masse, la particule est initialement au repos et se brise soudainement en deux fragments qui s'éloignent l'un de l'autre, alors que le centre de masse de l'ensemble se situe toujours au même endroit. L'énergie nécessaire à ce processus provient d'une énergie potentielle interne qui se convertit en énergie cinétique. Dans le cas d'une particule subatomique, ceci se traduit par une légère diminution de la masse totale des fragments par rapport à la masse de la particule initiale.



Définition des angles dans un processus de désintégration, dans le référentiel du laboratoire et celui du centre de masse.

Supposons que la particule initiale se déplace à une vitesse  $\mathbf{V}$  le long de l'axe des  $x$  dans le repère du laboratoire. Étudions la relation entre les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  que font les vitesses des deux fragments par rapport à cet axe, et l'angle  $\theta$  qu'elles font avec le même axe dans le repère du centre de masse. On peut reprendre ici le calcul fait plus haut dans le cas d'une collision élastique, sauf que la notation est légèrement différente :  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  désignent les vitesses des fragments dans le repère du laboratoire, et  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  les mêmes dans le repère du centre de masse. On trouve

$$\tan \theta_1 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{u_{1y}}{u_{1x} + V} = \frac{u_1 \sin \theta}{u_1 \cos \theta + V} \quad (6.38)$$

et de même ( $\theta_2$  étant défini positif vers le bas)

$$\tan \theta_2 = -\frac{v_{2y}}{v_{2x}} = -\frac{u_{2y}}{u_{2x} + V} = \frac{u_2 \sin \theta}{-u_2 \cos \theta + V} \quad (6.39)$$

Les grandeurs  $u_1$  et  $u_2$  se trouvent en fonction de l'énergie relâchée  $\Delta$ ; comme  $m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = 0$ , on a  $u_2 = u_1(m_1/m_2)$  et

$$\Delta = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u_1^2 \quad (6.40)$$

ce qui nous permet d'exprimer  $u_1$  et  $u_2$  en fonction de  $\Delta$ .

## C

### Objets à masse variable

La loi de la conservation de la quantité de mouvement peut nous aider à comprendre le mouvement d'objets dont la masse varie en fonction du temps, en raison d'une perte ou d'un apport en masse. L'exemple le plus courant est celui d'une fusée éjectant des gaz à grande vitesse pour se propulser. Lorsque la masse d'un objet dépend du temps, il peut être tentant d'appliquer la deuxième loi de Newton à la lettre de la manière suivante :

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v} \quad (\text{faux!}) \quad (6.41)$$

Cependant, cette équation découle d'une manipulation formelle injustifiée et n'est pas valable. Rappelons que les lois de Newton ne sont valables que pour des systèmes qui conservent l'intégralité de leurs parties et qu'une masse variable n'a pas de sens dans ce contexte. Il faut plutôt considérer la masse perdue ou éjectée dans chaque intervalle de temps comme faisant aussi partie du système.

#### Exemple 6.4 Fusée dans l'espace

Étudions maintenant le mouvement d'une fusée. La fusée est propulsée par la combustion de carburant dont les produits sont éjectés à grande vitesse par la tuyère du moteur. Considérons premièrement une fusée dans l'espace intersidéral, libre de toute influence gravitationnelle. Le système isolé dont la quantité de mouvement est conservée comprend alors la fusée et l'ensemble de son carburant, éjecté ou non. On supposera que le carburant brûlé s'échappe de la fusée à une vitesse  $v_0$  constante, par rapport à la fusée (on pose, par convenance, que  $v_0 > 0$ , même si le carburant se dirige vers l'arrière de la fusée). On supposera que le mouvement est unidimensionnel.

Soit  $m_i$  la masse initiale de la fusée, avec tout son carburant, et  $m_f$  sa masse finale, lorsque tout le carburant a été brûlé. Nous allons démontrer que si la fusée est initialement au repos, alors la vitesse finale de la fusée est

$$v_f = v_0 \ln \frac{m_i}{m_f} \quad (6.42)$$

Pour démontrer cette relation, considérons la fusée à l'instant  $t$ , ayant une vitesse  $v$  et une masse  $m(t)$ , fonction décroissante du temps (cette masse comprend le carburant non encore brûlé). Au bout d'un temps  $dt$  infinitésimal, la masse de la fusée sera  $m + dm$  ( $dm < 0$ ), la fusée aura éjecté une masse  $-dm$  de carburant et sa vitesse au temps  $t + dt$  sera  $v + dv$ . Nous avons adopté la convention que  $dm < 0$  afin de pouvoir considérer  $dm$  comme la différentielle de la masse de la fusée et non du carburant brûlé. La conservation de l'impulsion pour l'ensemble du système (fusée plus carburant) se lit alors

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - v_0) \quad (6.43)$$

En négligeant dans cette équation les termes du deuxième ordre ( $dm dv$ ), on trouve

$$0 = m dv + v_0 dm \quad \text{ou} \quad dv = -v_0 \frac{dm}{m} \quad (6.44)$$

En intégrant cette relation entre  $v = 0$  et  $v_f$ , on trouve

$$\int_0^{v_f} dv = v_f = -v_0 \int_{m_i}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_0 \ln \frac{m_i}{m_f} \quad (6.45)$$

ce qui est la relation cherchée. Notons que la vitesse finale de la fusée ne dépend que de la vitesse d'échappement  $v_0$  et du rapport des masses initiale et finale; elle ne dépend pas du taux précis d'échappement. Pour maximiser  $v_f$ , on a donc intérêt à éjecter le carburant à la plus grande vitesse possible, sans toutefois avoir besoin de le faire le plus rapidement possible dans le temps.

### Exemple 6.5 Fusée au décollage

Supposons maintenant que la fusée est dans un champ gravitationnel constant, comme lors d'un décollage à partir de la Terre. L'impulsion du système fusée-carburant n'est plus conservée, mais change de  $-mg \, dt$  dans un temps  $dt$ , en supposant que la gravité tire vers le bas (direction négative de l'axe). L'équation (6.43) doit alors être modifiée de la façon suivante :

$$m \, dv - mg \, dt = (m + dm)(v + dv) - dm(v - v_0) \quad (6.46)$$

Il s'ensuit que

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - v_0 \frac{dm}{dt} \quad (6.47)$$

Le deuxième terme de droite a la forme d'une force dirigée vers le haut (n'oublions pas que  $dm/dt < 0$ ). On l'appelle *force de poussée*. C'est une expression commode, mais en fait il ne s'agit pas d'une force externe agissant sur un système bien défini. Il s'agit plutôt de la réaction du carburant éjecté sur le reste de la fusée. En isolant  $dv$ , on trouve

$$dv = -g \, dt - \frac{v_0}{m} dm \quad (6.48)$$

En intégrant entre les temps  $t = 0$  (instant du décollage) et le temps  $t_f$ , auquel la fusée a une vitesse  $v_f$ , on trouve

$$v_f = -g \, t_f + v_0 \ln \frac{m_i}{m_f} \quad (6.49)$$

On conclut de cette relation que, pour maximiser la vitesse finale de la fusée, il faut non seulement maximiser la vitesse d'échappement du carburant, mais aussi le brûler le plus vite possible, car plus  $t_f$  est grand, plus  $v_f$  est petit. Pour que la fusée décolle, il faut aussi que la force de poussée soit supérieure à la force de gravité :

$$-v_0 \frac{dm}{dt} > m_i g \quad (6.50)$$

Notons que la relation (6.41) ne s'applique pas, même si elle jouit d'une ressemblance superficielle avec la relation correcte, qui serait plutôt

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} - \mathbf{v}_0 \frac{dm}{dt}, \quad (6.51)$$

où  $\mathbf{v}_0$  est la vitesse d'éjection de la masse par rapport à l'objet et  $\mathbf{F}$  est la force externe appliquée. Cette dernière relation est simplement une version vectorielle de la relation (6.47) où la force de gravité a été remplacée par une force externe quelconque. La relation (6.51) est plus générale et peut être appliquée au cas d'un apport de masse comme au cas d'une diminution de la masse.

### Exemple 6.6 Le collecte-poussière interplanétaire

Considérons comme dernier exemple celui d'un objet sans propulsion se déplaçant dans l'espace et collectant une certaine quantité de poussière appartenant à un nuage interplanétaire. Plaçons-nous dans le référentiel du nuage, dans lequel la poussière est au repos. Soit  $\rho$  la densité du nuage (masse par unité de volume), supposée uniforme, et  $A$  la section de l'objet en mouvement. On supposera que l'objet qui évolue dans ce nuage capture toute la poussière se trouvant sur son chemin, comme lors d'une collision maximale inélastique. La question est de savoir comment la vitesse de l'objet varie dans le temps, s'il possède une vitesse initiale  $v_0$  en entrant dans le nuage. Comme il est clair

que le mouvement de l'objet sera unidimensionnel, nous pouvons encore nous dispenser de la notation vectorielle dans cet exemple.

À un instant donné, la vitesse de l'objet est  $v$  (par rapport au nuage) et il parcourt une distance  $v dt$  pendant un temps  $dt$ . Il balaie donc un volume  $A v dt$  pendant ce temps et capture une masse  $\rho A v dt$ , se déplaçant à une vitesse relative  $-v$ . En appliquant la relation (6.51) à ce cas, avec  $dm/dt = \rho A v$ ,  $\mathbf{v}_0 \rightarrow -v$  et  $\mathbf{F} = 0$ , on trouve

$$0 = ma + v(\rho A v) \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\rho A}{m} v^2 \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -\frac{\rho A}{m} dt \quad (6.52)$$

Cette relation s'intègre immédiatement pour donner

$$\frac{1}{v} = \frac{\rho A}{m} t + \text{cte} \quad (6.53)$$

En posant que  $t = 0$  quand  $v = v_0$ , on détermine la constante d'intégration :

$$\frac{1}{v} = \frac{\rho A t}{m} + \frac{1}{v_0} \Rightarrow v = \frac{v_0}{1 + \frac{\rho A}{m} v_0 t} \quad (6.54)$$

Comme on s'y attend, la vitesse tend vers zéro quant  $t \rightarrow \infty$ .

## D Invariance par translation et conservation de la quantité de mouvement\*

Dans cette section, nous allons montrer comment la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolée peut être vue comme une conséquence d'un principe de symétrie : l'invariance par translation.

Soit  $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$  l'énergie potentielle de  $N$  particules en interaction. Si les  $N$  particules forment un système isolé, alors l'énergie potentielle ne dépend que de la position de ces particules et non de la position d'un quelconque objet externe qui pourrait exercer une force sur les particules du système. De plus, l'énergie potentielle ne peut pas dépendre du choix de l'origine, qui est tout à fait arbitraire. En effet, l'espace ne comporte pas de point de référence préférentiel : on dit qu'il est *homogène*. Ceci signifie que  $U$  reste inchangé lorsqu'on effectue une translation simultanée de toutes les coordonnées par un vecteur  $\mathbf{b}$  :

$$U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}, \dots, \mathbf{r}_N + \mathbf{b}) = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (6.55)$$

La conséquence de cette invariance par translation est que la force totale sur le système est nulle. En effet, calculons la dérivée du membre de gauche par rapport au vecteur  $\mathbf{b}$ ; on trouve

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{b}} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = -\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad (6.56)$$

où  $\mathbf{F}_i$  est la force exercée sur la  $i^{\text{ème}}$  particule, qui dérive de  $U$ . Or, comme le membre de droite de (6.55) est indépendant de  $\mathbf{b}$ , la dérivée (6.56) est forcément nulle, et donc la force totale aussi, ce qui implique la conservation de la quantité de mouvement totale du système.

Le fait que la force totale exercée sur un système isolé est nulle a été démontré à la section 3.B en utilisant la troisième loi de Newton : les forces internes s'annulent par paires. Or, la troisième loi de Newton peut être vue comme une conséquence du principe d'invariance par translation. En effet, la façon la plus simple

de respecter l'invariance par translation est que  $U$  ne dépende que des différences de coordonnées  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ , comme dans le cas de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$U = -G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (6.57)$$

En général, l'énergie potentielle d'un système de particules est non seulement invariante par translation, mais est aussi une somme sur les paires de particules :

$$U = \sum_{i < j} U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (6.58)$$

C'est le cas notamment de l'énergie potentielle gravitationnelle (6.57). Autrement dit, les particules interagissent deux à deux, de manière invariante par translation. C'est d'ailleurs la seule façon de définir  $\mathbf{F}_{ij}$ , la force s'exerçant sur la particule  $i$  par la particule  $j$ . D'après l'expression de la force en fonction de l'énergie potentielle, on trouve

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (6.59)$$

ce qui est bien la troisième loi de Newton.

En résumé, la conservation de la quantité de mouvement totale d'un objet est une conséquence du principe d'invariance par translation (homogénéité de l'espace). La troisième loi est aussi une conséquence de ce principe, si l'énergie potentielle est une somme sur les paires de particules, comme en (6.58). Il est à noter que, contrairement à l'énergie, il n'existe pas de 'quantité de mouvement potentielle' et de 'quantité de mouvement interne'. Autrement dit, il n'y a pas d'autre forme de quantité de mouvement que celle donnée par l'expression (3.5). On ne peut pas dire qu'une partie de la quantité de mouvement d'un objet soit camouflée à l'intérieur sous forme de chaleur ou autrement, comme pour l'énergie.

## Problèmes

### Problème 6.1

Une façon simple de mesurer la vitesse d'une balle de fusil est d'employer un *pendule ballistique*. La balle de masse  $m$ , ayant une vitesse  $v$ , entre en collision avec un pendule de masse  $M$  et de longueur  $l$ , initialement au repos. La balle est rapidement absorbée par le pendule, qui s'élève ensuite jusqu'à un angle d'inclinaison  $\phi$ .

**A** Quelle est la vitesse du pendule tout juste après avoir absorbé la balle? Supposez que la balle est absorbée très rapidement.

**B** Démontrez que la vitesse de la balle peut-être obtenue à l'aide des quantités (mesurées)  $m$ ,  $M$  et  $l$  à l'aide de la formule suivante :

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos \phi)}$$

### Problème 6.2

Une balle élastique en caoutchouc rebondit sur une plate-forme descendant à une vitesse  $V$ . À son contact avec la plate-forme, la balle a une vitesse  $\mathbf{u}$  par rapport au laboratoire (le repère 'fixe', par rapport auquel la plate-forme est en mouvement) et  $\mathbf{u}$  fait un angle  $\theta$  par rapport à la verticale. Avec quel angle  $\theta'$  la balle rebondira-t-elle?

### Problème 6.3

Un proton, en provenance d'un accélérateur de particules, entre en collision avec une particule inconnue au repos. Le proton est rétrodiffusé (c'est-à-dire qu'il rebondit vers son point de départ) avec les 4/9 de son énergie cinétique initiale. Si la collision est élastique, quelle est la masse  $M$  de la particule inconnue, par rapport à la masse  $m_p$  du proton?

### Problème 6.4

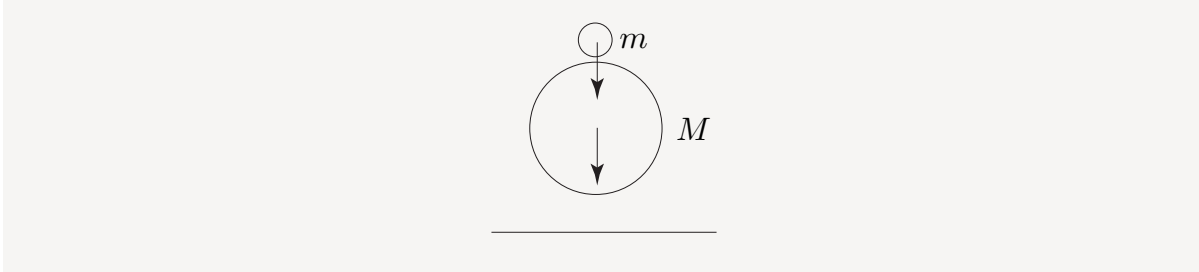
Deux balles de caoutchouc, parfaitement élastiques et respectivement de masse  $m$  et  $M$  ( $m < M$ ) sont relâchées l'une au-dessus de l'autre d'une hauteur  $h$ . La plus grosse des deux balles rebondit sur le sol et la deuxième balle rebondit l'instant d'après sur la plus grosse balle. Supposez que tout le mouvement est vertical.

**A** Tout juste avant la collision des deux balles, quelles sont leurs vitesses et quelle est la vitesse du centre de masse des deux balles?

**B** Quelle est la vitesse de la petite balle après la collision?

**C** Montrez que la hauteur maximale de la petite balle sera

$$h_{\max} = \left( \frac{3M - m}{M + m} \right)^2 h$$



### Problème 6.5

Une particule de masse  $m$ , animée d'une vitesse  $v$  (en une dimension), entre en collision avec un système de deux objets de masses  $M$  (système ci-après désigné par la lettre A) reliés par un ressort de constante  $k$ . Au départ, les deux objets reliés par un ressort sont au repos et le ressort n'est ni comprimé ni étiré (voir figure). On suppose que la collision entre la particule et la masse  $M$  située à gauche est instantanée et élastique. Ceci signifie que la masse  $M$  n'a pas eu le temps de bouger que la collision est déjà terminée.

**A** Calculez la vitesse  $v'_1$  de la particule après la collision et la vitesse  $V'$  du centre de masse du système A après la collision.

**B** Si  $E_{\text{int.}}$  désigne l'énergie interne (cinétique + potentielle) du système A et  $E_0$  l'énergie initiale de la particule, calculez le rapport  $E_{\text{int.}}/E_0$  en fonction seulement du rapport  $r = m/M$ . Que vaut ce rapport dans les limites  $r \rightarrow 0$  et  $r \rightarrow \infty$ ?

**C** Supposons que vous cherchez à briser le système A, sachant, par exemple, que le ressort se brise au-delà d'un certain étirement. L'énergie  $E_0$  que vous donnez à la particule que vous projetez sur le système A est fixe, mais vous avez le choix de la masse  $m$ . Quelle valeur de  $m$  (par rapport à  $M$ ) devez-vous utiliser pour maximiser vos chances de réussir?



### Problème 6.6

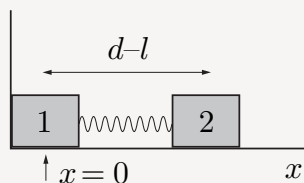
Deux blocs identiques, de masse  $m$ , sont reliés par un ressort en compression. La longueur à l'équilibre du ressort est  $d$  et celui-ci est comprimé à une longueur  $d - \ell$ . Le bloc de gauche est appuyé sur un mur et les deux blocs reposent sur une surface horizontale sans frottement. À  $t = 0$ , le système est relâché et, par la décompression du ressort, entreprend un mouvement vers la droite.

**A** Après que le bloc de gauche ait perdu contact avec le mur, l'énergie cinétique du centre de masse occupe quelle fraction de l'énergie totale du système?

**B** Quel est l'étirement maximum du ressort par rapport à sa valeur initiale?

**C** Donnez une expression détaillée des positions  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  du centre de chacun des blocs en fonction

du temps.



### Problème 6.7

Une cible mince en lithium est bombardée par des noyaux d'hélium d'énergie  $E_0$ . Considérez que les noyaux de lithium sont au repos dans la cible et qu'ils sont pratiquement libres, c'est-à-dire que leur énergie de liaison est négligeable par rapport à  $E_0$ . Quand un noyau d'hélium entre en collision avec un noyau de lithium, une réaction nucléaire peut se produire au cours de laquelle l'ensemble se transforme en un noyau de bore et un neutron. La collision est inélastique : l'énergie cinétique finale est plus petite de 2,8 MeV que l'énergie cinétique initiale ( $1 \text{ MeV} = 1,6 \times 10^{-13} \text{ J}$ ). Les masses relatives des particules en jeu sont les suivantes : hélium, masse 4 ; lithium, masse 7 ; bore, masse 10 ; neutron, masse 1.

**A** Quelle est l'énergie minimum  $E_0^{\min.}$  (énergie de seuil) des noyaux d'hélium en-deça de laquelle cette réaction ne peut pas se produire ? Quelle est l'énergie des neutrons à ce seuil ?

**B** Montrez que si l'énergie incidente est comprise dans l'intervalle  $E_0^{\min.} < E_0 < E_0^{\min.} + 0,27 \text{ MeV}$ , l'énergie des neutrons éjectés vers l'avant n'est pas fixée de manière unique, mais peut prendre deux valeurs. Ceci peut se comprendre plus facilement dans le référentiel du centre de masse.

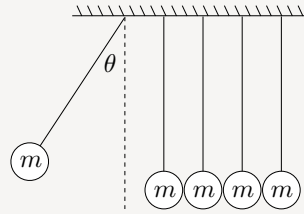
### Problème 6.8

L'une des attractions qu'on voit souvent trôner dans les officines bureaucratiques est un ensemble de pendules contigus constitués de billes d'acier, chacune suspendue par deux fils. Lorsqu'on laisse tomber une bille d'un certain angle, elle entre en collision avec les billes restantes et le choc se transmet entièrement à la bille située à l'autre extrémité, qui monte à son tour, redescend, retransmet le choc à la première bille, etc... Les billes centrales semblent ne jouer qu'un rôle de «transfert de choc», sans bouger. Or, cela n'est pas tout à fait vrai : à la longue, les billes centrales oscillent peu à peu et à la fin l'ensemble des billes oscille de manière solidaire, avec une amplitude plus petite que l'amplitude de la bille initiale. Ce phénomène est dû au fait que les collisions entre les billes ne sont pas parfaitement élastiques, mais qu'une petite partie de l'énergie est perdue en chaleur à chaque coup. Supposons ici qu'il s'agit de la seule perte d'énergie : on néglige la résistance de l'air ou les pertes dues au frottement des fils de suspension. Considérez un système de deux billes seulement. Si la première bille est initialement relâchée d'un angle  $\theta$ , quelle sera l'amplitude  $\theta'$  de l'oscillation solidaire des deux billes à la fin ? Donnez une relation entre  $\theta$  et  $\theta'$  n'impliquant aucun autre paramètre. Comment cela change-t-il si le système compte 5 billes au lieu de deux ?

Indice : lors de chaque *collision*, l'énergie n'est pas conservée, mais elle est conservée lors de l'*oscillation* d'une ou plusieurs billes. Inversement, *une autre quantité* est conservée lors de chaque collision, mais pas pendant l'oscillation. Vous pouvez supposer, si vous le désirez, que les amplitudes d'oscillation sont petites, de sorte que la période est indépendante de l'amplitude et que les collisions ont toujours lieu au point le



plus bas, mais cela n'est pas vraiment nécessaire.



### Problème 6.9

Un jet d'eau puissant sort latéralement d'une borne-fontaine. La vitesse du jet d'eau est  $v_0$ , la densité de l'eau est  $\rho$  et le diamètre de l'ouverture par laquelle passe le jet d'eau est  $D$ . Quelle est la force de réaction agissant sur la borne-fontaine?

### Problème 6.10

Un jet d'eau vertical, avec un débit  $\alpha$  (nombre de kg d'eau par seconde) et une vitesse de départ  $v_0$ , soutient une poubelle inversée de masse  $m$  à une hauteur  $h$ . Trouvez la hauteur  $h$  en fonction des paramètres  $\alpha$ ,  $m$ ,  $v_0$  et  $g$ .

### Problème 6.11

Un astronaute de masse  $M$  décide d'aller faire de menus travaux autour de la navette spatiale en orbite, sans être relié à la navette par un câble : il dispose d'une combinaison munie de micropropulseurs qui lui permettent de se déplacer. Malheureusement, on a oublié de renouveler le carburant des propulseurs et ceux-ci sont inopérants. L'astronaute est donc en train de dériver dans l'espace en s'éloignant de la navette à une vitesse  $v$  et il ne dispose que de cinq outils de masse  $m$  qu'il peut lancer loin de lui dans le but de se rapprocher de la navette. À chaque lancé, l'astronaute peut fournir un travail  $W$ .

**A** S'il veut être sûr de rejoindre la navette, est-il préférable qu'il lance les cinq outils simultanément ou l'un après l'autre? Expliquez.

**B** Donnez la vitesse de dérive maximum  $v$  que l'astronaute peut compenser en lançant ses outils, en fonction de  $m$ ,  $M$  et  $W$ , dans les deux cas évoqués en **A**.



## CHAPITRE 7

# MOUVEMENT DANS UN CHAMP DE FORCE CENTRAL

Dans ce chapitre nous nous intéressons au mouvement d'une particule dans un champ de force central, c'est-à-dire un champ de force dirigé vers l'origine et dont l'amplitude ne dépend pas de la direction. L'exemple le plus important est celui du champ gravitationnel exercé par un astre sphérique. Le problème particulier d'un objet en mouvement dans un tel champ gravitationnel est appelé *problème de Kepler* et sera résolu plus bas.

### A Moment cinétique et loi des aires

#### 7.A.1 Moment d'un vecteur

Considérons un vecteur  $\mathbf{A}$  associé à un point dont la position est  $\mathbf{r}$ . Par exemple,  $\mathbf{A}$  peut être la vitesse d'une particule située à ce point, ou encore la force s'exerçant sur cette particule, etc. Le *moment* de ce vecteur  $\mathbf{A}$  est défini comme le produit vectoriel de la position par  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{A} \quad (7.1)$$

Les moments les plus utilisés en mécanique sont le moment de la quantité de mouvement ou *moment cinétique*, et le moment de la force ou *couple* :

moment cinétique : $\mathbf{J} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = m\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ couple : $\mathbf{N} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$
--

(7.2)

La dérivée par rapport au temps d'un moment se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{r} \wedge \frac{d\mathbf{A}}{dt} \\ &= \mathbf{v} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Dans le cas du moment cinétique, comme  $\mathbf{A} = m\mathbf{v}$ , le premier terme s'annule, car  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$  et la dérivée du moment cinétique est simplement le couple :

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{N} \quad (7.4)$$

Ce résultat est parfois appelé *théorème du moment cinétique*. Nous avons ici utilisé la relation  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ , ce qui suppose que nous sommes dans un référentiel d'inertie.

De par sa définition, le moment d'un vecteur dépend en général du choix de l'origine, c'est-à-dire du point par rapport auquel il est évalué. Considérons une origine  $O'$  située à une position  $\mathbf{r}_0$  par rapport à l'origine  $O$ . La position  $\mathbf{r}'$  de l'objet par rapport à  $O'$  est  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ . Si le vecteur  $\mathbf{A}$  est indépendant du choix de l'origine (c'est le cas si  $\mathbf{A} = \mathbf{v}$  ou  $\mathbf{A} = \mathbf{F}$ ) alors le moment  $\mathbf{M}'$  du vecteur  $\mathbf{A}$  par rapport à  $O'$  est

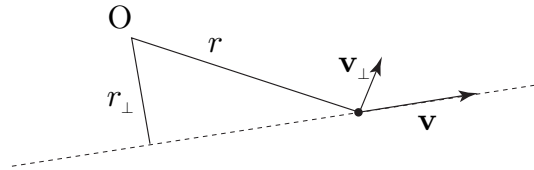
$$\mathbf{M}' = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge \mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{A} \quad (7.5)$$

On dit couramment que  $\mathbf{M}'$  «est évalué en  $\mathbf{r}_0$ » et que  $\mathbf{M}$  «est évalué à l'origine». En appliquant cette relation au moment cinétique et au couple, on trouve :

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} - \mathbf{r}_0 \wedge m\mathbf{v} \quad \mathbf{N}' = \mathbf{N} - \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{F} \quad (7.6)$$

FIGURE 7.1

La grandeur du produit  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$  est donnée par  $r v_{\perp}$  (la distance de l'origine à la particule, multipliée par la composante de  $\mathbf{v}$  perpendiculaire au vecteur position) ou par  $r_{\perp} v$  (la distance de l'origine jusqu'à la droite qui prolonge le vecteur vitesse, multipliée par la grandeur de la vitesse).



Signalons une autre façon d'exprimer le moment cinétique (ou tout autre moment). Le vecteur position  $\mathbf{r}$  d'une particule peut toujours être décomposé comme  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel}$ , où  $\mathbf{r}_{\perp}$  est un vecteur perpendiculaire à  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{r}_{\parallel}$  un vecteur parallèle à  $\mathbf{v}$ . Comme  $\mathbf{r}_{\parallel} \wedge \mathbf{v} = 0$ , le moment cinétique peut s'exprimer simplement comme  $\mathbf{J} = m\mathbf{r}_{\perp} \wedge \mathbf{v}$  ou, en grandeur,  $J = m r_{\perp} v$ . Autrement dit, la grandeur du moment cinétique est le produit de la masse par la vitesse, par la distance entre l'origine et la droite qui prolonge le vecteur vitesse (fig. 7.1).

## 7.A.2 Conservation du moment cinétique

La notion de moment cinétique est utile parce que cette quantité est conservée dans certaines circonstances. En particulier, lorsque la force qui s'exerce sur une particule est centrale, c'est-à-dire dirigée vers l'origine ou dans la direction opposée à l'origine, le moment cinétique de la particule évalué à l'origine est conservé (c'est-à-dire constant dans le temps). En effet, le couple exercé par la force centrale est nul :  $\mathbf{N} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = 0$  car  $\mathbf{F}$  est parallèle à  $\mathbf{r}$ , et donc  $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{N} = 0$ .

La première conséquence de la conservation du moment cinétique  $\mathbf{J}$  est que le mouvement de la particule est entièrement compris dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{J}$ . En effet,  $\mathbf{r}$  est par définition perpendiculaire à  $\mathbf{J}$  et la condition  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{J} = 0$  définit bel et bien un plan. Bien sûr, comme  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{J} = 0$ , la vitesse  $\mathbf{v}$  appartient au même plan. On peut librement choisir un système d'axes tel que ce plan soit le plan  $xy$  et utiliser les coordonnées sphériques  $r$  et  $\varphi$ .<sup>1</sup> En fonction de ces coordonnées, la position et la vitesse de la particule sont

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_{\varphi} \quad (7.7)$$

Le moment cinétique a donc l'expression suivante :

$$\mathbf{J} = m\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = m r^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_z \quad (7.8)$$

1. Notons que le plan  $xy$  coïncide avec le plan  $\theta = \pi/2$  et que sur ce plan, les coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi)$  et sphériques  $(r, \varphi)$  coïncident.

**FIGURE 7.2**

Illustration de la loi des aires pour une orbite elliptique. Le foyer F est à l'origine. Les aires des secteurs AFB et CFD sont égales, si les temps pour aller de A à B et de C à D sont égaux.

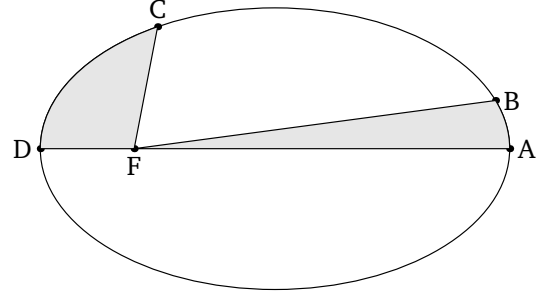
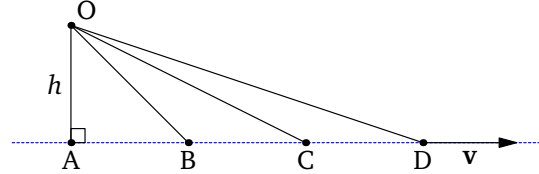
**FIGURE 7.3**

Illustration de la loi des aires pour une particule libre. Les aires des triangles OAB, OBC et OCD sont égales si les segments AB, BC, et CD sont égaux.



### 7.A.3 Loi des aires

Une autre conséquence de la conservation du moment cinétique est la deuxième loi de Kepler, dite *loi des aires* : l'aire balayée par unité de temps à partir de l'origine par le rayon vecteur d'un objet – la *vitesse aréolaire* – est constante. Autrement dit, en se référant à la trajectoire elliptique de la figure 7.2, si le temps requis pour aller du point A au point B est le même que pour aller du point C au point D, alors les aires des deux régions ombrées (AFB et CFD) sont les mêmes. Cette loi se démontre de la manière suivante : supposons que l'objet est au point  $\mathbf{r}$  au temps  $t$  et au point  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  au temps  $t + dt$ . L'aire  $dS$  balayée par le rayon vecteur de la particule pendant cet intervalle infinitésimal est l'aire du triangle formé par les deux vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  et peut s'exprimer par le produit vectoriel :

$$\begin{aligned}
 dS &= \frac{1}{2} |\mathbf{r} \wedge (\mathbf{r} + d\mathbf{r})| \\
 &= \frac{1}{2} |\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}| \\
 &= \frac{1}{2} |\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| dt \\
 &= \frac{|\mathbf{J}|}{2m} dt
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Le taux de changement de cette aire, c'est-à-dire l'aire balayée par unité de temps, est justement

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{|\mathbf{J}|}{2m}} \tag{7.10}$$

et est constant si le moment cinétique est conservé.

L'illustration la plus simple de la loi des aires est le mouvement d'une particule libre. Considérons la Fig. 7.3. Une particule libre se déplace à vitesse constante  $\mathbf{v}$ , à proximité d'une origine O arbitraire. Supposons que la particule se trouve à tour de rôle aux points A, B, C et D à des temps également espacés. Puisque sa vitesse est constante, les segments AB, BC et CD sont d'égales longueurs. La loi des aires stipule que les aires des triangles OAB, OBC et OCD sont égales. Or ceci est évident par géométrie élémentaire puisque chacun de ces triangles a une hauteur  $h$  et qu'ils ont tous des bases égales.

### Exemple 7.1 Distance minimale d'approche

Comme application de la conservation du moment cinétique, considérons un proton ayant une vitesse  $v_0$  à l'infini et entrant en collision avec un noyau de charge  $Ze$  situé à l'origine (voir la Fig. 7.4 ; on suppose le noyau fixe à l'origine). Dans un processus de collision comme celui-ci, le *paramètre d'impact*  $b$  est défini comme la distance entre la cible (le noyau) et la droite que suivrait le projectile s'il n'était pas dévié par la cible (cf. Fig. 7.4).

L'énergie potentielle du proton en présence de ce noyau est

$$U(r) = k \frac{Ze^2}{r} \quad (7.11)$$

Le moment cinétique initial du proton (évalué à l'origine) est  $J = mv_0 b$  ( $m$  est la masse du proton). Au point le plus proche du noyau, le proton a une vitesse  $v_s < v_0$  dans la direction perpendiculaire à son rayon vecteur et est situé à une distance  $s$  du noyau. Le problème est de calculer cette distance minimale d'approche  $s$ . Le moment cinétique du proton, à ce moment, est  $J = mv_s s$ . La conservation du moment cinétique nous dicte donc

$$s = b \frac{v_0}{v_s} \quad (7.12)$$

Cependant, nous désirons exprimer  $s$  uniquement en fonction de quantités connues bien avant la collision, à savoir  $b$  et  $v_0$ . Nous devons donc exprimer  $v_s$  en fonction de ces quantités, ce qui peut se faire en utilisant la loi de conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_s^2 + k \frac{Ze^2}{s} = \frac{1}{2} m \frac{v_0^2 b^2}{s^2} + k \frac{Ze^2}{s} \quad (7.13)$$

Il s'agit d'une équation quadratique en  $1/s$  :

$$k \frac{Ze^2}{s} = \frac{1}{2} m v_0^2 \left( 1 - \frac{b^2}{s^2} \right) \quad (7.14)$$

Cette équation peut être résolue pour  $s$  en fonction de  $b$  et  $v_0$ , par la méthode habituelle de résolution des équations quadratiques. La solution est

$$s = b \frac{\frac{m v_0^2 b}{k Z e^2}}{\sqrt{1 + \left( \frac{m v_0^2 b}{k Z e^2} \right)^2} - 1} \quad (7.15)$$

Le signe de la racine carrée a été choisi de manière à produire un résultat positif. Notons que  $b < s$  car nous avons affaire ici à une interaction répulsive (le proton et le noyau ont tous les deux une charge positive). Notons les limites suivantes :

$$b \rightarrow 0 \implies s \rightarrow \frac{k Z e^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} \quad b \rightarrow \infty \implies s \rightarrow b \quad (7.16)$$

Dans le premier cas ( $b \rightarrow 0$ ), le résultat s'obtient de manière évidente par la seule conservation de l'énergie. Dans le deuxième cas, ( $b \rightarrow \infty$ ), le projectile n'est pratiquement pas dévié par le noyau.

### Exemple 7.2 Section de capture d'une planète

Par le même procédé, on peut déterminer la section de capture d'une planète. Considérons un corps léger (astéroïde, satellite artificiel, etc.) de masse  $m$  en mouvement vers une planète de masse  $M$ , avec un paramètre d'impact  $b$ . Le potentiel d'interaction est maintenant  $U(r) = -GMm/r$  et l'éq. (7.14) peut être immédiatement adaptée à ce cas :

$$-G \frac{Mm}{s} = \frac{1}{2} m v_0^2 \left( 1 - \frac{b^2}{s^2} \right) \quad (7.17)$$

La solution (7.15) aussi se transpose facilement :

$$s = b \frac{\frac{v_0^2 b}{GM}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2 b}{GM}\right)^2} + 1} \quad (7.18)$$

(nous avons simplement procédé au remplacement  $kZe^2 \rightarrow -GMm$  et changé le signe de la racine carré (un choix de racine de l'équation quadratique) de manière à obtenir un résultat positif. Dans ce cas, comme l'énergie potentielle est négative, la distance minimale d'approche est plus petite que le paramètre d'impact :  $s < b$ . Pour que l'objet soit capturé par la planète, il suffit que  $s$  soit inférieur au rayon  $R$  de cette dernière. On obtient ainsi une condition pour la capture de l'objet en fonction de sa vitesse et de son paramètre d'impact :

$$R \geq b \frac{\frac{v_0^2 b}{GM}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2 b}{GM}\right)^2} + 1} \quad (7.19)$$

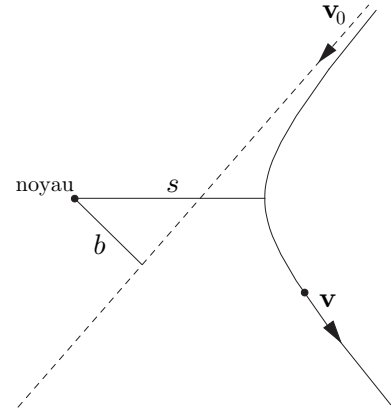
Dans l'équation ci-dessus, l'égalité ( $s = R$ ) mène à une valeur de  $b$  en fonction de  $R$  qui permet de calculer la section géométrique  $\pi b^2$  à l'intérieure de laquelle tout objet s'écrasera sur la planète (section de capture). Cependant, on peut plus facilement obtenir cette section de capture à partir de (7.17) en posant  $s = R$  et en isolant  $b^2$  :

$$\pi b^2 = 2\pi \frac{GMR}{v_0^2} + \pi R^2 \quad (7.20)$$

Le deuxième terme du membre de droite est la section géométrique de la planète et le premier est une correction qui est d'autant plus importante que  $v_0$  est petit. Si  $v_0 = 0$ , alors l'objet sera certainement capturé par la planète, alors que si  $v_0 \rightarrow \infty$ , l'objet ne sera capturé que si il se dirige en droite ligne vers la planète.

**FIGURE 7.4**

Processus de collision d'un projectile sur une cible fixe, avec paramètre d'impact  $b$ . À l'infini, la vitesse de la particule est  $\mathbf{v}_0$ . Si elle n'était pas déviée par la cible, elle passerait à une distance  $b$  de celle-ci, mais la répulsion la fait passer, au point le plus proche, à une distance  $s$  de la cible.



## B Potentiel central et orbites

Dans cette section nous allons montrer comment la conservation de l'énergie et du moment cinétique nous permet de comprendre le mouvement d'un objet dans un champ de force central comme si l'objet en question se déplaçait en une seule dimension, celle de la coordonnée radiale  $r$ .

Premièrement, écrivons l'énergie cinétique de l'objet en fonction des coordonnées  $(r, \varphi)$  :

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \\
 &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \\
 &= \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2m r^2}
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

L'énergie totale, incluant l'énergie potentielle  $U(r)$  associée au champ de force central, est

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2m r^2} + U(r) \tag{7.22}$$

Le premier terme est  $K_r$ , l'énergie cinétique radiale de l'objet. Le deuxième terme est l'énergie cinétique associée au mouvement angulaire de l'objet. Au lieu d'associer cette formule à une particule en mouvement dans un plan, on pourrait tout aussi bien l'associer à une particule se déplaçant dans une seule direction, le long de l'axe des  $r$ , mais dont l'énergie potentielle serait maintenant le *potentiel effectif* suivant :

$$U_{\text{eff.}}(r) \equiv \frac{J^2}{2m r^2} + U(r) \tag{7.23}$$

Le premier terme de  $U_{\text{eff.}}$ , impliquant le moment cinétique constant  $J$ , est appelé *potentiel centrifuge*. Bien sûr, l'objet qui nous intéresse se déplace sur un plan, mais la conservation du moment cinétique nous permet d'exprimer l'énergie cinétique angulaire en fonction de  $r$  et de lui donner l'apparence d'une énergie potentielle. L'évolution de la coordonnée radiale  $r$  en fonction du temps peut être déterminée à l'aide du potentiel effectif  $U_{\text{eff.}}$ , comme si l'objet se déplaçait en une seule dimension décrite par la coordonnée  $r$ , que son énergie cinétique était uniquement donnée par  $K_r = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$  et que son énergie potentielle était donnée par  $U_{\text{eff.}}$ . Il s'agit bien sûr d'un artifice, puisque  $U_{\text{eff.}}$  contient à la fois de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. C'est comme si on observait l'objet à partir d'un référentiel tournant à la même vitesse angulaire que lui, sans que cette vitesse angulaire soit nécessairement constante.

L'évolution dans le temps de la coordonnée radiale peut être obtenue en appliquant la conservation de l'énergie, soit en posant que la dérivée de l'énergie par rapport au temps s'annule :

$$\frac{dE}{dt} = 0 = m \dot{r} \ddot{r} + \frac{dU_{\text{eff.}}(r)}{dr} \dot{r} \tag{7.24}$$

ce qui entraîne que

$$m \ddot{r} = - \frac{dU_{\text{eff.}}}{dr} = \frac{J^2}{m r^3} - \frac{dU}{dr} \tag{7.25}$$

Le premier terme du membre de droite est la force centrifuge ressentie dans ce référentiel tournant (voir Sect. 9.B). En effet, puisque  $J = m r^2 \dot{\varphi}$ , ce terme est

$$\frac{J^2}{m r^3} = m r \dot{\varphi}^2 \tag{7.26}$$

ce qui est bien l'expression habituelle de la force centrifuge. Ceci justifie le nom de potentiel centrifuge donné au premier terme de (7.23).

Considérons maintenant le cas d'un potentiel en  $1/r$ , comme le potentiel gravitationnel. L'expression du potentiel effectif est

$$U_{\text{eff.}} = \frac{J^2}{2m r^2} - \frac{k}{r} \tag{7.27}$$



où  $k = GMm$  pour le potentiel gravitationnel d'un astre sphérique de masse  $M$  agissant sur un objet de masse  $m$ . Ce potentiel est illustré à la figure 7.5. On remarque qu'il possède un minimum au point  $r_0$ , déterminé par la condition  $U'_{\text{eff}} = 0$  :

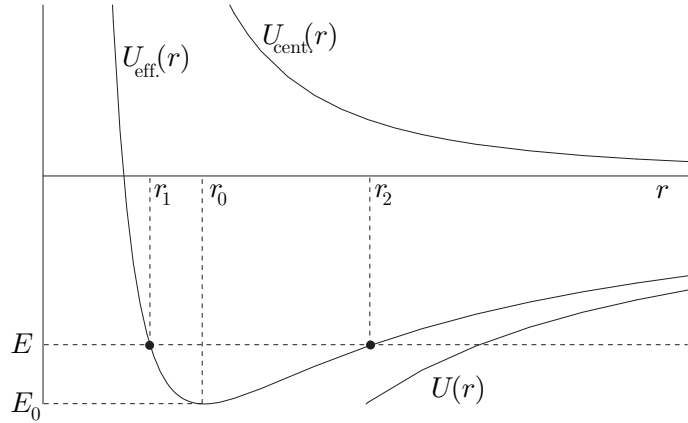
$$0 = \frac{dU_{\text{eff}}}{dr} \Big|_{r_0} = -\frac{J^2}{mr_0^3} + \frac{k}{r_0^2} \Rightarrow \boxed{r_0 = \frac{J^2}{km}} \quad (7.28)$$

La valeur du potentiel effectif à ce point est

$$U_{\text{eff}}(r_0) = -\frac{k}{2r_0} \equiv E_0 \quad (7.29)$$

**FIGURE 7.5**

Potentiel effectif  $U_{\text{eff}}$  d'un objet de moment cinétique  $J \neq 0$  dans un champ de force en  $1/r^2$ . Une valeur particulière de  $J$  a été choisie et les points de rebroussement  $r_1$  et  $r_2$  sont indiqués pour une valeur particulière (négative) de  $E$ .



Le mouvement d'un objet dans ce potentiel est dicté par la valeur de son énergie  $E$  :

1. Si  $E_0 < E < 0$ , alors il existe deux points  $r_1$  et  $r_2$ , déterminés par la condition  $U_{\text{eff}}(r_{1,2}) = E$ , pour lesquels l'énergie cinétique radiale  $K_r$  est nulle. Le mouvement radial de l'objet sera une oscillation limitée par ces deux points, correspondant respectivement à l'*aphélie* et au *périhélie* de l'objet et appelés pour cette raison points de *rebroussement*. La vitesse radiale  $\dot{r}$  de l'objet sera maximale à  $r_0$ , car c'est là que l'énergie cinétique radiale  $K_r = E - U_{\text{eff}}$  est la plus grande.
2. Dans le cas limite  $E = E_0$ , l'énergie cinétique radiale est nulle et donc  $r$  est constant ( $r = r_0$ ). L'orbite est donc circulaire dans ce cas.
3. Enfin, si  $E > 0$ , il n'y a qu'un seul point de rebroussement, correspondant à la distance minimale d'approche de l'objet et celui-ci peut s'éloigner à l'infini.

Notons que cette analyse n'est pas spécifique au potentiel en  $1/r$ , mais peut être appliquée à toute une classe de potentiels centraux.

## C

### Problème de Kepler

Dans l'histoire de la mécanique, le problème de Kepler, c'est-à-dire le calcul de l'orbite d'une particule sous l'influence d'une force en inverse du carré de la distance, occupe une place très importante. L'astronome allemand Johannes Kepler énonça trois lois qui portent son nom en 1609 (lois 1 et 2) et 1618 (loi 3), sur le mouvement des planètes du système solaire :

1. Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.
2. En des temps égaux, les rayons des planètes balaient des aires égales (loi des aires).

3. Le rapport du carré de la période au cube du demi grand axe de l'ellipse ( $T^2/a^3$ ) est le même pour toutes les planètes.

Kepler parvint à énoncer ces lois à partir de l'observation seule : ce sont des lois empiriques. C'est Newton qui va démontrer mathématiquement, vers 1686, que les trois lois de Kepler découlent des lois générales du mouvement et de la force de gravité en inverse du carré de la distance ( $1/r^2$ ). Nous avons démontré plus haut la deuxième loi de Kepler; elle est en fait valable pour toute force centrale. Les deux autres lois ne sont correctes que pour une force en  $1/r^2$ . Nous allons les démontrer dans cette section.

Considérons un objet ponctuel de masse  $m$ , se déplaçant dans le champ gravitationnel d'un astre de masse  $M$ . On supposera que  $M \gg m$ , de sorte que l'astre est pratiquement fixe. En exprimant l'énergie cinétique angulaire en fonction du moment cinétique, l'énergie totale de l'objet est <sup>2</sup>

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad k \equiv GMm \quad (7.30)$$

De cette équation, nous pouvons isoler  $\dot{r}$  :

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2k}{mr} - \frac{J^2}{m^2 r^2}} \quad (7.31)$$

Nous pouvons ensuite exprimer la différentielle  $dr$  en fonction de  $dt$  et des constantes du mouvement  $E$  et  $J$  :

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2k}{mr} - \frac{J^2}{m^2 r^2}}} \quad (7.32)$$

Nous pouvons en principe intégrer les deux membres de cette équation et obtenir la variation de  $r$  en fonction du temps. Cependant, ce qui nous intéresse ici est la trajectoire de l'objet, c'est-à-dire la courbe qu'il décrit dans le plan : c'est donc la relation entre  $r$  et  $\varphi$  que nous voulons obtenir. À cette fin, remarquons que

$$J = mr^2 \dot{\varphi} \implies dt = \frac{mr^2}{J} d\varphi \quad (7.33)$$

On peut donc récrire (7.32) ainsi :

$$d\varphi = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2mEr^4}{J^2} + \frac{2kmr^3}{J^2} - r^2}} \quad (7.34)$$

Notons que la quantité

$$r_0 \equiv \frac{J^2}{km} \quad (7.35)$$

a les unités d'une longueur : c'est la position du minimum du potentiel effectif dans l'éq. (7.28). Définissons ensuite la variable  $u \equiv r_0/r$ , telle que  $du = -u^2 dr/r_0$ . La relation (7.34) devient

$$d\varphi = -\frac{du}{\sqrt{-\frac{E}{E_0} + 2u - u^2}} \quad (7.36)$$

où  $E_0$  est le minimum du potentiel effectif, c'est-à-dire la valeur minimum de l'énergie que l'objet peut avoir, selon l'éq. (7.29). Il est maintenant possible de compléter le carré figurant au dénominateur :

$$-\frac{E}{E_0} + 2u - u^2 = -(u-1)^2 + 1 - \frac{E}{E_0} \quad (7.37)$$

2. Nous avons introduit la constante  $k$  dans le but de rendre le calcul plus général, en particulier pour éviter de confondre la masse gravitationnelle avec la masse inertielle, même si les deux sont en principe égales. Ceci sera utile lors de la discussion de la masse réduite, plus loin.

on trouve alors

$$d\varphi = -\frac{du}{\sqrt{e^2 - (u-1)^2}} \quad (7.38)$$

où on a défini

$$e \equiv \sqrt{1 - \frac{E}{E_0}} = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{k^2 m}} \quad (7.39)$$

L'intégrale se fait maintenant facilement :

$$\varphi = \arccos\left(\frac{u-1}{e}\right) + \text{cte} \quad (7.40)$$

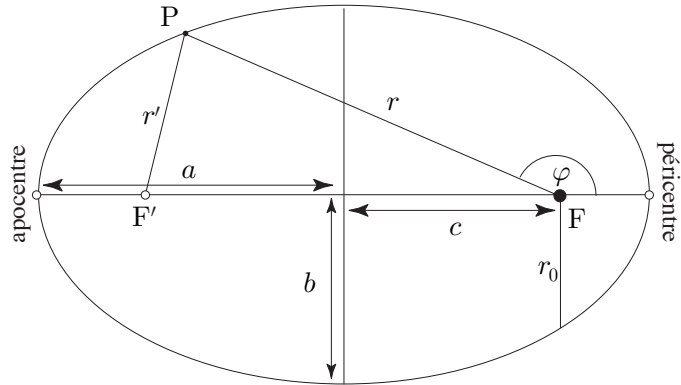
Choisissons l'origine des  $\varphi$  de sorte que la constante d'intégration soit nulle (ce choix est standard). On peut alors écrire

$$u = 1 + e \cos \varphi \implies r(\varphi) = \frac{r_0}{1 + e \cos \varphi} \quad (7.41)$$

Il s'agit là de l'équation d'une *section conique* (ou simplement, d'une *conique*) en coordonnées polaires, avec l'origine au foyer. Rappelons qu'une conique est la courbe d'intersection d'un cône avec un plan. Le paramètre  $e$  est appelé *excentricité*. Si  $0 \leq e < 1$ , la conique est une ellipse; si  $e > 1$ , il s'agit d'une hyperbole à deux branches; si  $e = 1$ , il s'agit d'une parabole.

**FIGURE 7.6**

Description d'une ellipse en coordonnées polaires  $(r, \varphi)$ , avec l'un des foyers ( $F$ ) comme origine. Le demi grand axe  $a$ , le demi petit axe  $b$  et  $c = ea$  sont indiqués. Le maximum de  $|r|$  se produit à  $r = r_0$ , quand  $\varphi = \pm\pi/2$ .



C'est l'énergie de l'objet qui détermine le type de trajectoire suivi :

1. Si l'énergie de l'objet est négative ( $E < 0$ ), alors l'excentricité  $e$  est plus petite que 1 et la trajectoire de l'objet est elliptique avec le centre d'attraction à l'un des foyers. C'est précisément la première loi de Kepler.
2. Si l'énergie est positive ( $E > 0$ ), alors l'excentricité est plus grande que 1 et la trajectoire est hyperbolique. La particule ne parcourt qu'une seule branche de l'hyperbole, avec une asymptote à  $\varphi = \pm \arccos(-1/e)$ . Voir à cet effet la Fig. 7.7.
3. Si l'énergie est nulle ( $E = 0$ ), la trajectoire est parabolique. Il est clair que ce cas est une singularité mathématique, mais on dit qu'une comète a une trajectoire parabolique si la mesure des paramètres de son orbite mène à une excentricité compatible avec  $e = 1$ , à l'intérieur des marges d'erreur.

### 7.C.1 Propriétés des coniques

Nous devons maintenant démontrer que la courbe décrite par l'équation

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{1 + e \cos \varphi} \quad (7.42)$$

possède les propriétés des coniques.

Commençons par le cas  $e < 1$ . Notons les propriétés suivantes (voir la figure 7.6) :

1. La courbe est bornée, c'est-à-dire que  $r$  n'est jamais infini, puisque le dénominateur de l'expression (7.42) n'est jamais nul.
2. La courbe est fermée sur elle-même. En effet, l'expression (7.42) est une fonction périodique en  $\varphi$  de période  $2\pi$ , et donc elle revient au même point après une révolution complète.
3. La courbe est symétrique par rapport à l'axe horizontal, car l'expression (7.42) est une fonction paire de  $\varphi$ .
4. Le point le plus rapproché de l'origine, le *péricentre*, correspond à  $\varphi = 0$ , et sa distance de l'origine est  $r_p = r_0/(1+e)$ . Le point le plus éloigné, l'*apocentre*, correspond à  $\varphi = \pi$  et sa distance de l'origine est  $r_a = r_0/(1-e)$ . La distance de l'objet en quadrature, c'est-à-dire à  $\varphi = \pi/2$ , est précisément  $r_0$ .
5. La largeur de la courbe est le grand axe, noté  $2a$  ( $a$  est le demi grand axe), qui vaut

$$2a = r_p + r_a = \frac{2r_0}{1-e^2} \implies a = \frac{r_0}{1-e^2} \quad (7.43)$$

et l'équation de la courbe peut s'écrire

$$r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \varphi} \quad (7.44)$$

6. Définissons la distance  $c = ae$ , et introduisons un point  $F'$  situé à une distance  $2c$  à gauche de l'origine  $F$  (voir figure). Montrons que la somme des distances entre un point  $P$  et les deux points est la même pour tous les points de la courbe (ce qui confirmerait que la courbe est une ellipse, selon l'une des définitions habituelles de l'ellipse). Ces deux points ( $F$  et  $F'$ ) sont appelés les *foyers* de l'ellipse. La démonstration est simple, et se base sur la loi des cosinus : la distance  $r'$  est telle que

$$r'^2 = r^2 + 4c^2 - 4rc \cos(\pi - \varphi) \quad (7.45)$$

puisque  $\pi - \varphi$  est l'angle entre les côtés du triangle de longueurs  $r$  et  $2c$  respectivement. Comme  $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$ , alors

$$r'^2 = r^2 + 4c^2 + 4rc \cos \varphi \quad (7.46)$$

Mais l'équation (7.44) peut aussi s'écrire  $er \cos \varphi = a(1-e^2) - r$ , ce qui permet d'éliminer  $\varphi$  de l'équation ci-haut :

$$r'^2 = r^2 + 4e^2 a^2 + 4a(a(1-e^2) - r) \quad (7.47)$$

(nous avons substitué  $c = ae$ ). En simplifiant, on trouve

$$r'^2 = r^2 + 4a^2 - 4ar = (r - 2a)^2 \quad (7.48)$$

Prenons maintenant la racine carrée de l'équation. Comme  $r$  est toujours inférieur à  $2a$ , alors  $\sqrt{(r-2a)^2} = 2a - r$  et on trouve enfin

$$r' = 2a - r \implies r' + r = 2a \quad (7.49)$$

Ceci démontre donc la propriété que la somme des distances aux deux foyers est une constante, égale à  $2a$ .

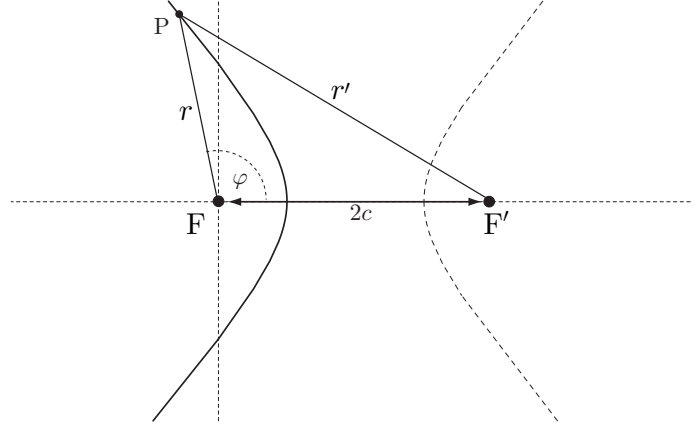
7. Cette dernière propriété de l'ellipse implique une symétrie entre les deux foyers, c'est-à-dire que la courbe doit être symétrique lors d'une réflexion par rapport à son centre, situé à mi-chemin entre les deux foyers, donc à une distance  $c = ae$  de l'origine.

Continuons par le cas  $e > 1$ . Notons les propriétés suivantes (voir la figure 7.7) :

1. Comme dans le cas précédent, la courbe est symétrique lors d'une réflexion par rapport à l'axe horizontal, en raison de la parité de la fonction  $\cos \varphi$ .

**FIGURE 7.7**

Description d'une trajectoire hyperbolique en coordonnées polaires, avec un des foyers comme origine. L'autre moitié de l'hyperbole (en pointillé) n'est pas parcourue par l'objet.



2. Comme  $e > 1$ , le dénominateur de l'expression (7.42) s'annule quand  $\cos \varphi = -1/e$ , et donc la courbe s'éloigne à l'infini à ces valeurs de  $\varphi$ , qui correspondent à des asymptotes. Appelons  $\varphi_0$  la valeur correspondante de  $\varphi$ , c'est-à-dire telle que  $\cos \varphi_0 = -1/e$  et  $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$ .
3. Dans le domaine  $\varphi \in [\varphi_0, 2\pi - \varphi_0]$ , la valeur de  $r$  tirée de l'éq. (7.42) est négative. Géométriquement, ceci correspond un point situé à une distance  $|r| > 0$  de l'origine, mais de l'autre côté de l'origine. Ce domaine d'angle décrit une branche distincte de la même courbe, indiquée en pointillé sur la figure.
4. La trajectoire physique de l'objet correspond à la branche illustrée à gauche, concave par rapport à l'origine et qui correspond donc à une force attractive.
5. Le point le plus rapproché de l'origine est obtenu quand  $\varphi = 0$ , et est situé à une distance  $r_p = r_0/(1+e)$ .
6. Comme dans le cas elliptique, définissons un autre point,  $F'$ , situé à une distance  $2c$  à droite de l'origine  $F$ , où  $c = ae$  et où  $a$  est cette fois défini par l'expression

$$a = \frac{r_0}{e^2 - 1} \implies r_0 = a(e^2 - 1) \quad (7.50)$$

Reprenons les calculs effectués dans le cas elliptique, avec les modifications appropriées. La loi des cosinus est encore appliquée, mais l'angle entre les deux côtés connus est  $\varphi$  et non plus  $\pi - \varphi$  :

$$r'^2 = r^2 + 4c^2 - 4rc \cos \varphi \quad (7.51)$$

Comme l'équation (7.42) peut aussi s'écrire  $er \cos \varphi = a(e^2 - 1) - r$  dans ce cas, on peut éliminer  $\varphi$  de l'équation ci-haut :

$$r'^2 = r^2 + 4e^2 a^2 - 4a(a(e^2 - 1) - r) \quad (7.52)$$

(nous avons substitué  $c = ae$ ). En simplifiant, on trouve

$$r'^2 = r^2 + 4a^2 + 4ar = (r + 2a)^2 \quad (7.53)$$

La racine carrée nous donne

$$r' = 2a + r \implies r' - r = 2a \quad (7.54)$$

Ceci démontre donc la propriété que la différence des distances aux deux foyers est une constante, égale à  $2a$ . C'est une propriété reconnue de l'hyperbole.

Enfin, le cas  $e = 1$  correspond à une parabole. Cette correspondance sera démontrée plus bas, lors de la comparaison avec les équations cartésiennes des mêmes courbes.

### 7.C.2 Correspondance avec les coordonnées cartésiennes

Une autre façon de démontrer que l'éq. (7.41) décrit bien une ellipse, une parabole ou une hyperbole est de comparer cette équation à l'expression plus connue de ces courbes en coordonnées cartésiennes. À cette fin, récrivons cette équation comme  $r = r_0 - r e \cos \varphi$  et substituons les coordonnées cartésiennes  $x = r \cos \varphi$  et  $y = r \sin \varphi$  :

$$r = r_0 - e x \implies r^2 = x^2 + y^2 = r_0^2 + e^2 x^2 - 2 r_0 e x \quad (7.55)$$

ou encore

$$x^2(1 - e^2) + 2 r_0 e x + y^2 = r_0^2 \quad (7.56)$$

Complétons le carré de l'expression en  $x$  :

$$(1 - e^2) \left( x + \frac{e r_0}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = r_0^2 + \frac{e^2}{1 - e^2} r_0^2 = \frac{r_0^2}{1 - e^2} \quad (7.57)$$

Définissons maintenant la coordonnées  $x'$  obtenue de  $x$  par une translation de l'origine :

$$x' = x + c \quad c = \frac{e r_0}{1 - e^2} \quad (7.58)$$

L'équation de la courbe se ramène alors à

$$\frac{x'^2}{\frac{r_0^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{r_0^2}{(1 - e^2)}} = 1 \quad (7.59)$$

Considérons maintenant les trois cas possibles :

1.  $e < 1$ . Dans ce cas, on peut définir

$$\boxed{a = \frac{r_0}{1 - e^2} \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - e^2}}} \quad c = a e = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (7.60)$$

et l'équation de la courbe correspond bien à celle d'une **ellipse** centrée en  $x' = 0, y = 0$  :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7.61)$$

Le paramètre  $a$  est alors le demi grand axe de l'ellipse et  $b$  est le demi petit axe. En particulier, si  $e = 0$  (correspondant à l'énergie minimale  $E = E_0$ ) la courbe est un cercle de rayon  $a = b$ .

2.  $e > 1$ . On définit plutôt

$$\boxed{a = \frac{r_0}{e^2 - 1} \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{e^2 - 1}}} \quad (7.62)$$

et l'équation de la courbe correspond bien à celle d'une **hyperbole** à deux branches centrée en  $x' = 0, y = 0$  :

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7.63)$$

L'hyperbole admet une asymptote à un angle  $\varphi_0 = \pm \arccos(-1/e)$  par rapport au foyer.

3.  $e = 1$ . Il s'agit du cas limite entre une ellipse et une hyperbole. On ne peut utiliser l'éq. (7.59) directement, car on y a divisé par  $1 - e^2$ . Retournons plutôt à l'expression (7.56). On trouve alors

$$x = -\frac{y^2}{2 r_0} + \frac{r_0}{2} \quad (7.64)$$

C'est l'équation d'une parabole, tournée d'un angle droit par rapport à sa définition habituelle ( $x$  en fonction de  $y$  au lieu du contraire). L'origine  $x = y = 0$  est le foyer de la parabole.

## D Orbites elliptiques

À la section précédente nous avons démontré qu'un objet d'énergie totale négative décrit autour du centre d'attraction une orbite elliptique. Dans cette section nous allons donner un peu plus de détails sur les orbites elliptiques, en particulier leur spécification dans l'espace.

### 7.D.1 Troisième loi de Kepler

La troisième loi de Kepler stipule que le rapport du carré de la période au cube du demi grand axe est le même pour toutes les planètes. En effet, si on intègre la loi des aires (7.10) sur le temps, on trouve

$$\int \frac{dS}{dt} dt = S = \frac{J}{2m} T \quad (7.65)$$

où  $T$  est la période de l'orbite et  $S$  est l'aire totale balayée en une période, soit l'aire de l'ellipse  $\pi ab$ . En substituant les valeurs explicites de  $a$  et  $b$ , on trouve

$$T = \frac{2\pi m}{J} \frac{r_0^2}{(1-e^2)^{3/2}} = (2\pi) \sqrt{\frac{m}{k}} a^{3/2} \quad (7.66)$$

ou, vu que  $k = GMm$ ,

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM} a^3 \quad (7.67)$$

Le point important ici est que, pour un astre central donné, le carré de la période ne dépend que du demi grand axe  $a$  et rien d'autre. Autrement dit, toutes les orbites ayant une valeur fixe de  $a$  ont la même période, quelle que soit leur excentricité.

### 7.D.2 Énergie, moment cinétique et vitesses

Les paramètres de l'ellipse (le demi grand axe  $a$  et l'excentricité  $e$ ) sont déterminés par l'énergie totale  $E$  et la grandeur  $J$  du moment cinétique de l'objet :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{k^2m}} \quad a = \frac{r_0}{1-e^2} = \frac{J^2}{km} \frac{1}{1-e^2} = -\frac{k}{2E} \quad (7.68)$$

Inversement, nous pouvons exprimer  $E$  et  $J$  en fonction de  $a$  et  $e$  :

$$E = -\frac{k}{2a} \quad J = \sqrt{kma(1-e^2)} \quad (7.69)$$

La vitesse de l'objet se trouve facilement en fonction de sa distance  $r$ , car l'énergie totale est simplement

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} \quad \text{et donc} \quad v^2 = \frac{k}{m} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (7.70)$$

En fonction de  $a$ , l'équation de l'orbite (7.41) s'écrit ainsi :

$$r(\varphi) = a \frac{1-e^2}{1+e \cos \varphi} \quad (7.71)$$

Selon cette équation, l'apocentre de l'orbite – le point le plus éloigné du centre d'attraction – se trouve à  $\varphi = \pi$ , soit à une distance  $r_a = a(1+e) = a + c$ . De même, le péricentre – le point le plus rapproché – se trouve à  $\varphi = 0$ , à une distance  $r_p = a(1-e) = a - c$ . À ces deux points le vecteur vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur et donc la grandeur du moment cinétique est simplement le produit  $mvr$ . On obtient donc, pour l'apocentre et le péricentre, respectivement,

$$v_a = \frac{J}{mr_a} = \sqrt{\frac{k(1-e)}{ma(1+e)}} \quad v_p = \frac{J}{mr_p} = \sqrt{\frac{k(1+e)}{ma(1-e)}} \quad (7.72)$$

Bien sûr, ces vitesses peuvent aussi s'obtenir de la relation (7.70). Notons que, dans le cas d'une orbite autour du Soleil, les termes *apocentre* et *péricentre* sont remplacés par *aphélie* et *périhélie*, respectivement. Pour une orbite autour de la Terre, on dit plutôt *apogée* et *périgée*.

### 7.D.3 Équation de Kepler

L'équation de l'ellipse nous donne la distance  $r$  en fonction de l'angle, mais pas le temps écoulé depuis le passage au péricentre. Le temps peut s'obtenir à l'aide de l'*équation de Kepler*, que nous allons donner ici sans démonstration. On commence par définir l'*anomalie excentrique*  $E$  (notation standard : ne pas confondre avec l'énergie totale), définie par la relation

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\varphi}{2} \quad (7.73)$$

Ensuite, le temps  $t$  depuis le passage au péricentre ( $\varphi = 0$ ) est déterminé par la solution de l'équation transcendante suivante :

$$t = \frac{T}{2\pi}(E - e \sin E) \quad (7.74)$$

où  $T$  est la période de l'orbite. Remarquons que quand  $\varphi$  fait un tour complet (de 0 à  $2\pi$ ),  $E$  fait de même (mais à un rythme différent) et donc  $t$  change par  $T$ , comme prévu. Dans le jargon, l'angle  $\varphi$  est appelé *anomalie vraie* et l'angle  $2\pi t/T$ , qui croît linéairement avec le temps, est appelé *anomalie moyenne*. Dans une orbite circulaire, les trois anomalies se confondent, mais elles sont toutes les trois différentes dans une orbite elliptique (*anomalie* est simplement un synonyme d'*angle* dans ce contexte).

### 7.D.4 Éléments d'une orbite

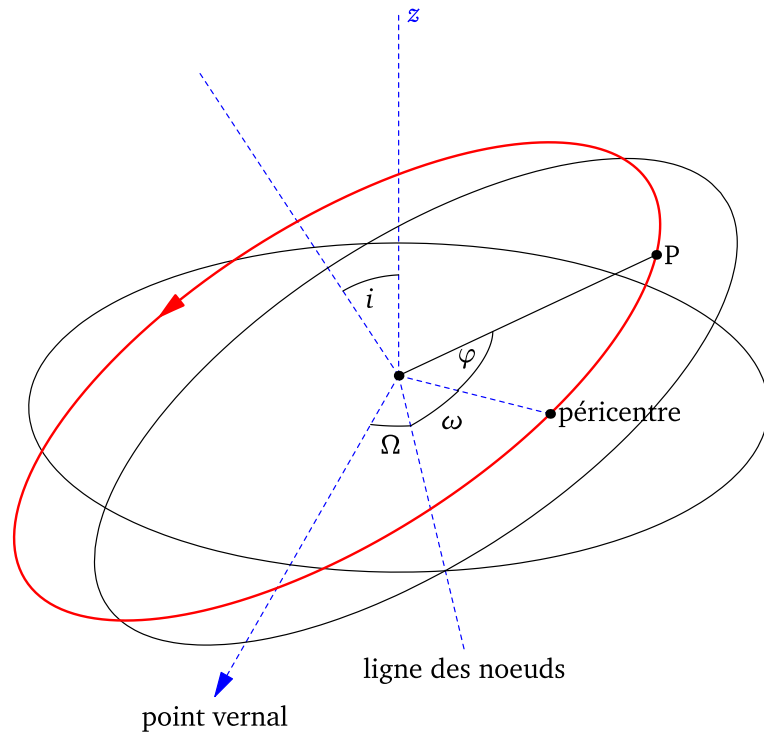
Pour spécifier complètement une orbite dans l'espace, il faut donner non seulement les paramètres  $a$  et  $e$ , mais aussi le plan de l'orbite et l'orientation de l'ellipse dans ce plan. La Fig. 7.8 illustre les paramètres couramment utilisés à cette fin. L'inclinaison  $i$  de l'orbite est l'angle entre le plan de l'orbite et le plan équatorial (le plan de l'orbite terrestre (écliptique) dans le cas d'une planète ou le plan de l'équateur terrestre dans le cas d'un satellite artificiel de la Terre). La *ligne des noeuds* est l'intersection de ces deux plans. La *longitude du noeud ascendant*  $\Omega$  est l'angle entre une direction de référence sur le plan équatorial (le point vernal) et la ligne des noeuds, plus précisément le point où l'orbite traverse le plan équatorial vers le haut. L'angle  $\omega$  entre la ligne des noeuds et le péricentre (ou péricentre) de l'orbite est appelé *argument du péricentre*. L'angle  $\varphi$  entre la position réelle de l'objet et le rayon vecteur du péricentre est l'*anomalie vraie*. Il faut aussi spécifier le moment précis  $\tau$  où l'objet est passé au péricentre. L'ensemble des six quantités

$$i, \Omega, \omega, a, e, \tau \quad (7.75)$$

sont ce qu'on appelle les *éléments* de l'orbite elliptique et permettent en principe de trouver la position précise d'un objet (planète, astéroïde, satellite, etc.) dans l'espace, à tout instant. Cependant, gardons à l'esprit que les éléments d'une orbite réelle ne sont pas constants, en raison des perturbations causées par les autres



**FIGURE 7.8**  
Description d'une orbite elliptique dans l'espace.



Objet	$m$ ( $10^{24}$ kg)	$a$ ( $10^6$ km)	$T$ (jours)	$e$	$i$ (degrés)
Terre	5,9736	149,6	365,256	0,0167	0 (déf.)
Lune	0,07349	0,3844	27,322	0,0549	5,145
Mercure	0,3302	57,9	87,969	0,2056	7,00
Venus	4,869	108,2	224,701	0,0068	3,4
Mars	0,6419	227,9	686,98	0,0934	1,85
Jupiter	1 898,6	778,3	4 332,589	0,0484	1,305
Saturne	568,46	1 427,0	10 759,22	0,05565	2,489
Uranus	86,83	2 869,6	30 685,4	0,04724	0,773
Neptune	102,43	4 496,6	60 189	0,00858	1,773
Pluton	0,0125	5 913,5	90 465	0,2482	17,15
Comète de Halley		17,94 u.a.	76,1 ans	0,967	162,2
Comète Kohoutek		1,571 u.a.	6,24 ans	0,537	5,4

**TABLE 7.1**

Paramètres orbitaux de quelques objets du système solaire. Description des variables :  $m$  : masse de l'objet ;  $a$  : demi grand axe ;  $T$  : période de l'orbite ;  $e$  : excentricité ;  $i$  : inclinaison du plan de l'orbite par rapport au plan de l'orbite terrestre. Notons que u.a. signifie «unité astronomique» (demi grand axe de l'orbite terrestre).

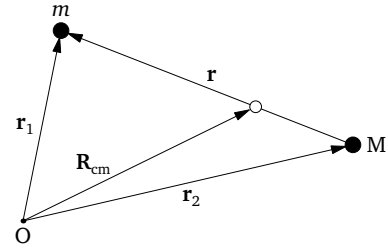
planètes ou par d'autres objets. Ainsi, certains éléments, en particulier  $\omega$  et  $\Omega$ , ont des variations lentes et progressives dites *séculaires*. L'étude de ces variations est l'objet principal de la *mécanique céleste* (la mécanique des objets célestes) et permet non seulement de contrôler les vols spatiaux, mais d'étudier les causes physiques de ces variations, par exemple les corrections apportées par la relativité générale à l'orbite de Mercure, ou l'effet de la forme aplatie de la Terre sur l'orbite des satellites artificiels. Le tableau 7.1 énumère quelques paramètres orbitaux d'objets du système solaire.

## E Le problème à deux corps

Notre traitement du problème de Kepler laisse un peu à désirer, car il suppose que la masse centrale est fixe, alors que c'est le *centre de masse* de l'astre et de l'objet qui doit être fixe dans un référentiel inertiel. En d'autres termes, nous avons résolu le *problème à un corps*, dans lequel un seul objet est mobile. Il est vrai que cette supposition est pratiquement correcte quand le centre d'attraction est beaucoup plus lourd que l'objet, mais ce n'est pas toujours le cas.

FIGURE 7.9

Positions  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  de deux corps, du centre de masse  $\mathbf{R}_{\text{cm}}$  et position relative  $\mathbf{r}$ .



Heureusement, il est facile de résoudre le *problème à deux corps*, dans lequel deux objets sont mobiles et exercent une force mutuelle en l'inverse du carré de la distance. Considérons deux objets, de masses  $m$  et  $M$  et de positions  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ , qui interagissent par une force centrale  $F(r)$ , qui ne dépend, par définition, que de la distance  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Définissons le vecteur  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  de position relative des deux objets. On peut alors exprimer  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  en fonction de  $\mathbf{r}$  et du vecteur centre de masse  $\mathbf{R}_{\text{cm}}$  des deux objets :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{R}_{\text{cm}} &= \frac{1}{M+m}(m\mathbf{r}_1 + M\mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R}_{\text{cm}} + \frac{M}{M+m}\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R}_{\text{cm}} - \frac{m}{M+m}\mathbf{r} \end{aligned} \quad (7.76)$$

D'autre part, les équations du mouvement pour les deux objets sont

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{1}{m}F(r)\mathbf{e}_r \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{1}{M}F(r)\mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (7.77)$$

où  $r = |\mathbf{r}|$  et où  $\mathbf{e}_r$  est le vecteur unitaire dans la direction de  $\mathbf{r}$ . En soustrayant ces deux équations, on trouve

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \ddot{\mathbf{r}} = \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) F(r)\mathbf{e}_r \quad (7.78)$$

On définit ensuite la *masse réduite*  $\mu$  :

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \quad (7.79)$$

et on trouve simplement

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = F(r) \mathbf{e}_r \quad (7.80)$$

Cette équation signifie que le problème des deux particules se réduit au problème d'une seule particule «effective», de position  $\mathbf{r}$  et de masse  $\mu$ , subissant une force  $F(r)$  qui ne dépend que de la grandeur de  $\mathbf{r}$ . Autrement dit, le cas d'un centre d'attraction mobile se réduit à celui d'un centre fixe, pourvu que la masse de l'objet étudié ( $m$ ) soit remplacée par la masse réduite  $\mu$ . Dans le cas d'un centre d'attraction infiniment massif ( $M \rightarrow \infty$ ), ceci revient à la façon dont nous avons traité le problème plus haut ( $\mu \rightarrow m$ ). Notons que  $\mu$  est toujours plus petit que la plus petite des deux masses ( $m$  ou  $M$ ), d'où son nom de masse *réduite*. Dans le cas où les deux objets ont la même masse ( $m = M$ ), la masse réduite vaut la moitié de  $m$  ( $\mu = m/2$ ).

Notons que l'énergie  $E$  et le moment cinétique  $J$  du problème équivalent à un corps coïncident avec l'énergie totale et le moment cinétique total des deux corps. Seule la masse diffère.

Donc, en toute rigueur, la troisième loi de Kepler devrait s'écrire ainsi :

$$T^2 = (2\pi)^2 \frac{\mu}{k} a^3 = \frac{(2\pi)^2}{G(M+m)} a^3 \quad (7.81)$$

cette relation dépend maintenant de la masse de la planète, mais très faiblement, car  $M \gg m$ . Il n'est donc plus strictement vrai de dire que le rapport  $T^2/a^3$  est le même pour toutes les planètes. Mais de toute manière, le problème à deux corps n'est plus applicable à ce degré de précision : on peut approximativement traiter Jupiter et le Soleil ensemble à l'aide du concept de masse réduite, mais alors les autres planètes ne peuvent plus être traitées simultanément ! Le mouvement du Soleil causé par Jupiter est une complication additionnelle dans l'étude du mouvement des autres planètes, et compte parmi les petites corrections (perturbations) que les astronomes doivent considérer.

Remarque : retournons aux équations (7.77) et considérons plutôt la combinaison suivante :

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 + M\ddot{\mathbf{r}}_2 = (m+M)\ddot{\mathbf{R}}_{\text{cm}} = 0 \quad (7.82)$$

cette relation signifie simplement que la vitesse du centre de masse est constante, ce qui est naturel puisqu'aucune force externe aux deux objets n'est considérée.

Ce succès dans la solution du problème à deux corps pourrait nous encourager à poursuivre et à tenter de résoudre le *problème à trois corps*. Malheureusement, aucune solution générale du problème à trois corps n'est connue, malgré les efforts intenses des astronomes et mathématiciens depuis le début du XVIIIe siècle. Cependant, des solutions particulières sont connues. Par exemple, si on suppose que les trois corps se déplacent dans un même plan, alors il existe une solution particulière où les trois corps sont situés aux sommets d'un triangle équilatéral, triangle qui change de taille et d'orientation au cours du temps, alors que chacun des objets suit une orbite elliptique, le centre de masse des trois objets étant au foyer. Le problème à trois corps *restreint* est plus simple : dans ce cas, l'un des trois objets est de masse négligeable, de sorte que les deux autres suivent une orbite elliptique comme dans le problème à deux corps, alors que le troisième objet, lui, subit l'influence des deux premiers. Pour plus de détails, voir l'ouvrage de GOLDSTEIN.

## Problèmes

### Problème 7.1

Une particule se déplace comme suit en fonction du temps :

$$\mathbf{r}(t) = A \cos \omega t \mathbf{e}_x + B \sin \omega t \mathbf{e}_y$$

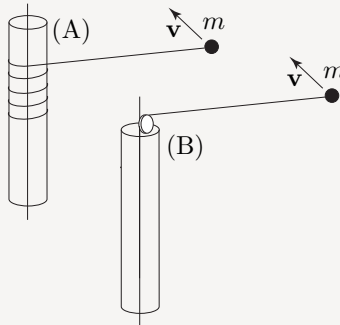
où  $A$  et  $B$  sont des constantes qui ne dépendent que des conditions initiales.

- A** Calculez le vecteur accélération.
- B** Le moment cinétique de la particule (évalué à l'origine) est-il conservé?
- C** La force qui cause ce mouvement est-elle conservative? Dans l'affirmative, quel serait le potentiel correspondant?
- D** Montrez que la trajectoire de la particule est une ellipse centrée à l'origine.

### Problème 7.2

Un objet de masse  $m$  est fixé à l'extrémité d'une corde de masse négligeable. L'objet est animé d'un mouvement de rotation autour d'un support auquel la corde est attachée. En (A), la corde s'enroule **autour** d'un cylindre de rayon  $R$ , alors qu'en (B) elle est tirée par une force externe, via une poulie, vers le **centre** du cylindre (on peut imaginer que la poulie est montée sur un pivot et qu'elle suit l'objet dans sa rotation autour du cylindre). Dans les deux cas, il est pratique de placer l'origine au centre du cylindre. On peut supposer que le tout est dans l'espace, de sorte que la gravité ne joue aucun rôle.

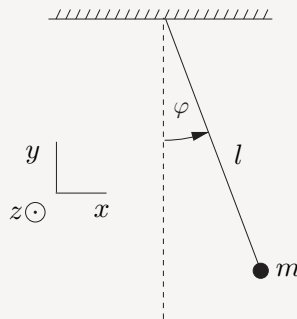
- A** Dans chaque cas (A et B), une quantité est conservée. Laquelle et pourquoi?
- B** Soit  $v_0$  la vitesse de l'objet autour du cylindre lorsque l'objet est à une distance  $r_0$  du centre (on suppose  $r_0 \gg R$ ). Quelle est, dans chaque cas, la vitesse  $v$  de l'objet à la fin de sa rotation, quand il frappe le cylindre?



**Problème 7.3**

Reconsidérons le problème du pendule en utilisant la notion de moment cinétique. Supposez que le pendule oscille dans le plan  $x y$ .

- A** Quel est le moment cinétique du pendule (grandeur et direction) par rapport au point d'attache, en fonction de  $\dot{\varphi}$ ? Notez que  $\varphi$ , tel qu'illustré, est positif.
- B** Quel est le couple agissant sur le pendule (évalué au point d'attache) et à quelle(s) force(s) est-il attribué?
- C** Déduisez une équation différentielle pour  $\varphi$  dans l'approximation des petites amplitudes *en vous servant de la relation entre le couple et le moment cinétique*.
- D** Selon vous, le moment cinétique du pendule dépend-il du choix de l'origine dans ce problème?
- E** Supposez maintenant que le pendule soit libre d'osciller dans toutes les directions et non seulement dans le plan  $x y$ . Y a-t-il une composante du moment cinétique qui soit conservée?

**Problème 7.4**

Écrivez le potentiel effectif  $U_{\text{eff.}}(r)$  décrivant le mouvement radial d'un objet se trouvant dans un champ gravitationnel central et démontrez que la période des petites oscillations autour du minimum  $r = r_0$  de  $U_{\text{eff.}}$  coïncide avec la période de rotation de l'objet dans une orbite circulaire de rayon  $r_0$ .

**Problème 7.5**

Une particule est en orbite dans un champ de force central dont l'intensité varie en loi de puissance en fonction de la distance :  $F = a/r^n$  ( $a$  est une constante). Le cas habituel est celui de la gravité ( $n = 2$ ), mais nous allons considérer ici une valeur réelle quelconque de  $n$  ( $n > 1$ ).

- A** Écrivez le potentiel effectif  $U_{\text{eff.}}$  associé à cette loi de force, en plaçant le zéro d'énergie potentielle à l'infini.
- B** Selon vous, pour quelles valeurs de  $n$  des orbites stables sont-elles possibles?

### Problème 7.6

Considérons un objet soumis à l'influence d'une force en inverse du carré de la distance (problème de Kepler), avec un potentiel  $U(r) = -k/r$ . On définit le *vecteur de Laplace*  $\mathbf{A}$  comme suit :

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{J} - m k \mathbf{e}_r$$

où  $\mathbf{e}_r$  est le vecteur unitaire dans la direction radiale,  $\mathbf{p}$  la quantité de mouvement de l'objet et  $\mathbf{J}$  son moment cinétique.

**A** Démontrez que le vecteur  $\mathbf{A}$  est conservé, c'est-à-dire constant dans le temps. Indice : calculez sa dérivée et appliquez la relation  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ .

**B** Supposez que  $\mathbf{A}$  est non nul. Soit  $\varphi$  l'angle entre le vecteur  $\mathbf{A}$  fixe et la position  $\mathbf{r}$  de l'objet. En calculant le produit scalaire  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ , démontrez que la trajectoire de l'objet est une conique, c'est-à-dire qu'elle a la forme

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \varphi}$$

et exprimez  $r_0$  et  $e$  en fonction de  $J$ ,  $m$ ,  $k$  et  $A$  (la grandeur de  $\mathbf{A}$ ). Notez qu'aucune intégration n'est requise.

### Problème 7.7

Une planète est en orbite elliptique autour du Soleil. Donnez une expression de l'angle  $\theta$  entre le rayon vecteur  $\mathbf{r}$  de la planète et sa vitesse  $\mathbf{v}$ , en fonction de l'angle orbital  $\varphi$  et des paramètres orbitaux.

### Problème 7.8

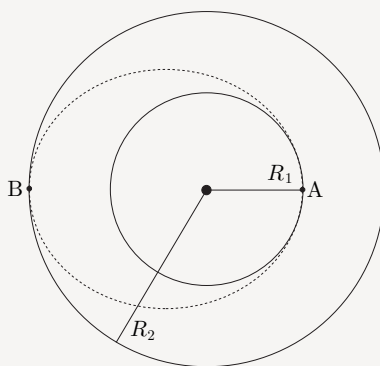
**A** La *vitesse d'insertion*  $v_{\text{ins}}$  d'un satellite artificiel est définie comme la vitesse de ce satellite lorsqu'il est en orbite circulaire autour de la Terre. Démontrez que

$$v_{\text{ins}} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_{\text{lib.}}$$

où  $v_{\text{lib.}}$  est la vitesse de libération de ce satellite lorsqu'il se trouve sur la même orbite.

**B** Un satellite est en orbite circulaire de rayon  $R_1$  et on désire l'envoyer en orbite circulaire de rayon  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ). Pour ce faire, on donne au satellite un supplément d'énergie cinétique  $\Delta K$  au point A pour qu'il quitte son orbite circulaire et suive une orbite elliptique telle que sa distance maximum est égale à  $R_2$ , lorsqu'il parvient au point B (voir la figure). Une fois au point B, on lui donne un autre supplément d'énergie cinétique  $\Delta K'$  pour qu'il adopte une orbite circulaire de rayon  $R_2$ . Montrez que les suppléments d'énergie cinétiques à donner aux points A et B sont

$$\Delta K = \frac{GMm}{2R_1} \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \quad \Delta K' = \frac{GMm}{2R_2} \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$$

**Problème 7.9**

Un projectile est lancé à une vitesse initiale  $v_0$  et à un angle  $\psi$  avec la verticale. On s'intéresse à la hauteur maximale  $h$  atteinte par l'objet, en négligeant complètement la résistance de l'air ou la rotation de la Terre (on peut remplacer la Terre par la Lune, si on veut absolument justifier cette approximation). Cependant,  $v_0$  est si grand que l'objet s'éloigne appréciablement de la surface et qu'il faut tenir compte de la variation du champ gravitationnel en fonction de l'altitude. La trajectoire de l'objet est en fait une portion d'ellipse, avec le centre de la Terre au foyer. On note le rayon de la Terre  $R$  et sa masse  $M$ .

**A** Démontrez que la hauteur maximale  $h$  atteinte par l'objet est donnée par :

$$\frac{h}{R} = \frac{\gamma \sin^2 \psi}{1 - \sqrt{1 - \gamma(2 - \gamma) \sin^2 \psi}} - 1 \quad (7.83)$$

où on a introduit la constante

$$\gamma = \frac{R v_0^2}{G M}$$

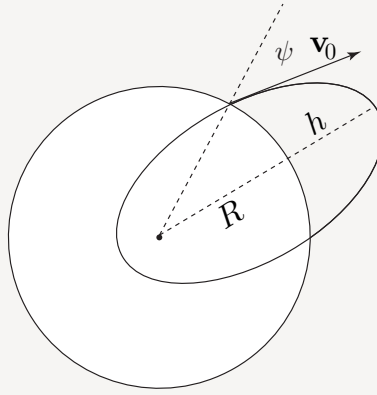
Indice : il n'est pas nécessaire d'utiliser ici les propriétés précises de la trajectoire elliptique. Il suffit d'appliquer la conservation simultanée de l'énergie  $E$  et du moment cinétique  $J$  (la composante du moment cinétique qui sort de la page). Il faut donc calculer  $E$  et  $J$  au point de départ et au point le plus haut de la trajectoire, en notant que la vitesse à cet endroit est perpendiculaire au vecteur position. Ceci nous donne deux équations de conservation, nous permettant de déterminer deux variables, comme la vitesse  $v$  de l'objet au sommet de sa trajectoire et l'altitude  $h$ .

**B** Que donne cette formule quand  $\psi = 0$  et  $\psi = \pi/2$ ? Dans le premier cas, il ne faut pas bêtement poser  $\psi = 0$ , mais prendre la limite appropriée. Auriez-vous pu obtenir ces résultats particuliers autrement? Supposez que  $\gamma < 1$ .

**C** Supposons maintenant que la vitesse  $v_0$  est petite, de sorte que le paramètre  $\gamma$  est très petit. Procédez à un développement de Taylor au deuxième ordre en  $\gamma$  dans la première expression (7.83). Vérifiez que le résultat coïncide avec ce qu'on aurait obtenu en supposant le champ gravitationnel  $g$  uniforme.

N.B. La formule du binôme est

$$(1 + \varepsilon)^r = 1 + r\varepsilon + \frac{1}{2}r(r-1)\varepsilon^2 + \frac{1}{6}r(r-1)(r-2)\varepsilon^3 + \dots$$



### Problème 7.10

Supposons qu'un objet soit principalement soumis à une force centrale attractive en  $k/r^2$ , comme la gravité, mais qu'une force centrale additionnelle (mais petite) de la forme

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{e}_r \quad \alpha = \text{constante}$$

soit aussi ressentie (une telle force est qualifiée de *perturbation* si elle n'est pas trop grande).

**A** Démontrez que la trajectoire de l'objet a la forme suivante :

$$r(\varphi) = \frac{\gamma^2 r_0}{1 + e \cos(\gamma \varphi)} \quad (7.84)$$

où

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{\alpha m}{J^2}} \quad e = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2 E}{E_0}}$$

$r_0$  et  $E_0$  étant les mêmes que dans les notes.

**B** Comme la perturbation est faible ( $\alpha$  petit), le paramètre  $\gamma$  est proche de l'unité. Expliquez pourquoi la courbe (7.84) correspond à une ellipse en *précession*, c'est-à-dire dont l'orientation change dans le temps. Indices : vous devez essentiellement reprendre le calcul du cas attractif (le problème de Kepler), en y ajoutant l'énergie potentielle associée à la perturbation. Cette énergie potentielle a la même dépendance en  $r$  que le potentiel centrifuge associé au moment cinétique.

### Problème 7.11

Dans ce problème nous étudierons le cas d'une particule subissant une force centrale répulsive en inverse du carré de la distance, comme celle qui existe entre deux particules chargées de même signe. On posera que la force ressentie par la particule est

$$F(r) = \frac{k}{r^2} \mathbf{e}_r$$

où  $k > 0$ . Dans le cas d'une répulsion coulombienne,  $k = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ . L'énergie potentielle associée est



(notez le signe)

$$U(r) = \frac{k}{r}$$

**A** Reprenez les calculs de la section 7.C, mais cette fois avec une énergie potentielle associée à une force répulsive, ce qui veut dire que le signe de  $k$  est changé. Autrement dit, partez de l'expression suivante de l'énergie totale :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}$$

et montrez que la trajectoire de la particule est décrite par l'équation suivante :

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{e \cos \varphi - 1} \quad \text{où} \quad r_0 = \frac{J^2}{km} \quad , \quad e = \sqrt{1 + \frac{E}{E_0}} \quad , \quad E_0 = \frac{k}{2r_0}$$

**B** Montrez que cette courbe est une hyperbole (en explicitant la correspondance avec les coordonnées cartésiennes) et tracez-la en indiquant les asymptotes, la position du centre de répulsion et la distance entre ce centre et l'origine des coordonnées cartésiennes.

**C** Supposez que le projectile s'approche du centre de répulsion en provenance de l'infini avec un paramètre d'impact  $b$ . Montrez, de manière géométrique, que ce paramètre d'impact coïncide avec le paramètre de même symbole qui décrit l'équation de l'hyperbole en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**D** Si  $v_0$  désigne la vitesse du projectile lorsqu'il est infiniment éloigné de la cible, alors donnez une expression de  $E$  et de  $J$  en fonction de  $v_0$ , de  $b$  et de la masse  $m$  du projectile. Montrez ensuite que l'angle de diffusion  $\theta_1$  du projectile est donné par

$$\cot \frac{\theta_1}{2} = \frac{m v_0^2 b}{k}$$

Cette dernière relation fut utilisée par Rutherford dans l'interprétation de sa célèbre expérience de diffusion de particules alpha sur une feuille d'or, afin de proposer son modèle nucléaire de l'atome, en opposition avec le modèle du «plum pouding» de J.J. Thomson.

### Problème 7.12

Avant de relâcher le module lunaire, la capsule Apollo 11 a été placée en orbite elliptique autour de la Lune. La masse de la capsule était de 9 979 kg, la période de l'orbite était de 119 minutes et les distances maximale et minimale au centre de la Lune étaient 1 861 km et 1 838 km. D'après ces données, quelle est la masse de la Lune ?

### Problème 7.13

La comète de Halley est en orbite elliptique autour du Soleil. L'excentricité de son orbite est  $e = 0,967$  et sa période est de 76,1 années. N'utilisez aucune autre donnée que celles-ci.

- A** Calculez la distance de la comète au Soleil à son périhélie et à son aphélie. Exprimez les distances en unités astronomiques (ua), c'est-à-dire en multiples du demi-grand axe de l'orbite de la Terre autour du Soleil.
- B** Quelle est la vitesse de la comète à son périhélie et à son aphélie? Exprimez vos réponses en ua/an.
- C** En vous servant des équations de Kepler, estimez combien de temps la comète de Halley passe en deçà de l'orbite terrestre, c'est-à-dire le temps où sa distance au Soleil est inférieure à la distance moyenne terre Soleil. Exprimez votre réponse en jours ou en fraction d'année, pas en secondes!

**Problème 7.14**

La Lune décrit une orbite quasi circulaire autour de la Terre. Si, par une intervention divine, la Lune s'arrêtait net sur son orbite, combien de temps mettrait-elle à tomber sur la Terre? Aucun calcul compliqué n'est nécessaire, mais la troisième loi de Kepler  $T = 2\pi a^{3/2} / \sqrt{GM}$  peut être utilisée directement, car, même dans cette situation, la lune décrit une orbite elliptique. Ne tenez pas compte des rayons de la Terre ou de la Lune et exprimez votre réponse en fraction de mois lunaire.

**Problème 7.15**

Une particule de masse  $m$  se déplace avec un moment cinétique  $J$  dans un champ de force central

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3}$$

où les constantes  $k$  et  $\lambda$  sont positives.

- A** Montrez que l'orbite est de la forme

$$r(\varphi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos(\beta \varphi)}$$

où  $c$ ,  $\beta$  et  $\epsilon$  sont des constantes positives.

- B** Exprimez  $c$  et  $\beta$  en fonction des paramètres  $k$  et  $\lambda$  et décrivez l'orbite dans le cas  $0 < \epsilon < 1$ .
- C** Pour quelles valeurs de  $\beta$  l'orbite est-elle fermée? Que deviennent vos résultats si  $\lambda \rightarrow 0$ ?

(auteur : M. Pioro-Ladrière)

## CHAPITRE 8

# MOMENT CINÉTIQUE ET ROTATION DES CORPS

Dans la section 7.A nous avons introduit la notion de moment cinétique d'une particule. Dans cette section nous appliquerons cette notion à un *système*, en particulier à un objet rigide en rotation autour d'un axe fixe.

### A Moment cinétique et centre de masse

Le *moment cinétique*  $\mathbf{J}$  d'un système évalué à l'origine est défini comme la somme vectorielle (ou résultante) des moments cinétiques de toutes les particules composant le système :

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{v}_i \quad (8.1)$$

Le *couple*  $\mathbf{N}$  (ou moment de force) agissant sur un système est de même la somme vectorielle des couples agissant sur chacune des particules :

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i \quad (8.2)$$

Ces définitions naturelles entraînent que le couple agissant sur un système est encore la dérivée par rapport au temps du moment cinétique de ce système, car  $\mathbf{N}_i = \dot{\mathbf{J}}_i$  pour chaque particule séparément. Le théorème du moment cinétique est donc encore valable :

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} \quad (8.3)$$

#### 8.A.1 Absence de couple interne

Rappelons que la force totale  $\mathbf{F}_i$  exercée sur la  $i^e$  particule du système est la somme d'une force  $\mathbf{F}_i^{\text{ext.}}$  extérieure au système et des forces  $\mathbf{F}_{ij}$  exercées par les autres particules du système :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext.}} + \mathbf{F}_i^{\text{int.}} \quad \mathbf{F}_i^{\text{int.}} = \sum_{j (j \neq i)} \mathbf{F}_{ij} \quad (8.4)$$

Le couple  $\mathbf{N}$  exercé sur le système est donc la somme de deux contributions : l'une ( $\mathbf{N}^{\text{ext.}}$ ) attribuable aux seules forces externes et l'autre ( $\mathbf{N}^{\text{int.}}$ ) aux seules forces internes :

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^{\text{ext.}} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext.}} \\ \mathbf{N}^{\text{int.}} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{int.}}\end{aligned}\tag{8.5}$$

Or, on montre facilement que le couple interne est nul, en supposant que la force mutuelle  $\mathbf{F}_{ij}$  entre deux particules est centrale, c'est-à-dire s'exerce suivant la droite qui relie les deux particules :

$$\mathbf{F}_{ij} \wedge (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = 0\tag{8.6}$$

Partant de cette hypothèse, la démonstration est simple :

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^{\text{int.}} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j (j \neq i)} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} \\ &= \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} \\ &= \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_j \wedge \mathbf{F}_{ji} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \wedge \mathbf{F}_{ij} = 0\end{aligned}\tag{8.7}$$

(la dernière équation s'obtient en prenant la moyenne des deux équations précédentes et en tenant compte du fait que  $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ ). Il s'ensuit que la dérivée temporelle du moment cinétique n'est attribuable qu'aux forces externes :

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{N}^{\text{ext.}} = \mathbf{N}$$

(8.8)

Ce résultat porte le nom de *théorème du moment cinétique*. Il serait tout à fait bizarre qu'une force d'interaction  $\mathbf{F}_{ij}$  ne soit pas centrale, c'est-à-dire ne respecte pas la condition (8.6). Cela laisserait la porte ouverte à des systèmes qui, sans toutefois pouvoir accélérer spontanément dans un mouvement linéaire (la troisième loi de Newton étant tout de même respectée), pourraient accélérer spontanément dans un mouvement de rotation, sans l'aide d'un couple externe ! Cela violerait de toute façon le principe de la conservation de l'énergie.

## 8.A.2 Second théorème de König

Bien sûr, le moment cinétique et le couple dépendent du point auquel ils sont évalués, ainsi que du référentiel dans lequel ils sont calculés. En particulier, on peut considérer le moment cinétique d'un objet par rapport à son centre de masse, c'est-à-dire qu'on peut se placer dans le référentiel du centre de masse de l'objet et adopter de plus le centre de masse comme origine dans ce référentiel. Le moment cinétique ainsi calculé est qualifié d'*intrinsèque* à l'objet, et sera noté  $\mathbf{J}_{\text{cm}}$  dans ce qui suit.

### **Théorème 8.1 König II**

Le moment cinétique total  $\mathbf{J}$  d'un objet, dans un référentiel quelconque et en un point quelconque, peut

être décomposé de la manière suivante :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{cm}} + \mathbf{R}_{\text{cm}} \wedge \mathbf{P}_{\text{tot}} \quad (8.9)$$

**Preuve:** Considérons un point  $\mathbf{r}_0$  en mouvement et le référentiel  $S'$  attaché à ce point. Ce référentiel peut en général être accéléré, c'est-à-dire non inertiel. La position d'une particule dans  $S'$  est  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$ . Donc la vitesse de la même particule dans  $S'$  est  $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0$ . Le moment cinétique évalué à  $\mathbf{r}_0$  dans le référentiel  $S'$  est alors

$$\begin{aligned} \mathbf{J}' &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \wedge (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0) \\ &= \mathbf{J} - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{v}_0 \\ &= \mathbf{J} - \mathbf{r}_0 \wedge \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \right) - \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right) \wedge \mathbf{v}_0 + M_{\text{tot}} \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{v}_0 \\ &= \mathbf{J} - \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{P}_{\text{tot}} - M_{\text{tot}} (\mathbf{R}_{\text{cm}} - \mathbf{r}_0) \wedge \mathbf{v}_0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

où  $\mathbf{P}_{\text{tot}}$  est l'impulsion totale du système. En particulier, si  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_{\text{cm}}$ , on retrouve la relation  $\mathbf{J}_{\text{cm}} = \mathbf{J} - \mathbf{R}_{\text{cm}} \wedge \mathbf{P}_{\text{tot}}$ , ce qui démontre le théorème.

Autrement dit, le moment cinétique est la somme du moment cinétique intrinsèque et d'une contribution  $\mathbf{R}_{\text{cm}} \wedge \mathbf{P}_{\text{tot}}$ , appelée moment cinétique *orbital*, qui serait le moment cinétique du système si toute la masse de celui-ci était concentrée en son centre de masse.<sup>1</sup> Notons que, comme dans le cas du premier théorème de König, le référentiel du centre de masse n'a pas besoin d'être inertiel pour que le théorème s'applique : il peut être accéléré.

Le second théorème de König s'applique aussi au couple total :

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\text{cm}} + \mathbf{R}_{\text{cm}} \wedge \mathbf{F}_{\text{tot}} \quad (8.11)$$

où  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$  est la force totale agissant sur le système. La même démonstration que ci-haut peut être reprise, en la modifiant légèrement :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \wedge \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{N} - \mathbf{r}_0 \wedge \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{N} - \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{F}_{\text{tot}} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Si  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_{\text{cm}}$ , on retrouve la relation  $\mathbf{N}_{\text{cm}} = \mathbf{N} - \mathbf{R}_{\text{cm}} \wedge \mathbf{F}_{\text{tot}}$ . Notons ici que la force  $\mathbf{F}_i$  est indépendante du référentiel.

Le second théorème de König ne serait pas très utile si le théorème du moment cinétique ne s'appliquait pas séparément au moment cinétique intrinsèque et au couple intrinsèque :

$$\mathbf{N}_{\text{cm}} = \frac{d\mathbf{J}_{\text{cm}}}{dt} \quad (8.13)$$

1. Le parallèle avec le premier théorème de König est évident : dans ce cas, l'énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique calculée dans le référentiel du centre de masse et de l'énergie cinétique associée au mouvement du centre de masse, comme si toute la masse du système y était concentrée.

Cette relation n'est pas immédiatement évidente, car le théorème du moment cinétique découle de la deuxième loi de Newton ( $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ) et celle-ci n'est strictement valable que dans un référentiel d'inertie, alors que la relation (8.13) reste valable même si le centre de masse de l'objet est accéléré. Pour démontrer la relation (8.13), substituons les relations (8.9) et (8.11) dans le théorème du moment cinétique (8.8) :

$$\frac{d\mathbf{J}_{\text{cm}}}{dt} + \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_{\text{cm}} \wedge \mathbf{P}_{\text{tot}}) = \mathbf{N}_{\text{cm}} + \mathbf{R}_{\text{cm}} \wedge \mathbf{F}_{\text{tot}} \quad (8.14)$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_{\text{cm}} \wedge \mathbf{P}_{\text{tot}}) &= \frac{d\mathbf{R}_{\text{cm}}}{dt} \wedge \mathbf{P}_{\text{tot}} + \mathbf{R}_{\text{cm}} \wedge \frac{d\mathbf{P}_{\text{tot}}}{dt} \\ &= \mathbf{V}_{\text{cm}} \wedge \mathbf{P}_{\text{tot}} + \mathbf{R}_{\text{cm}} \wedge \mathbf{F}_{\text{tot}} \end{aligned} \quad (8.15)$$

Le premier terme s'annule, car  $\mathbf{P}_{\text{tot}} = M_{\text{tot}}\mathbf{V}_{\text{cm}}$ . On peut donc affirmer, par différence avec l'équation précédente, que  $\mathbf{N}_{\text{cm}} = d\mathbf{J}_{\text{cm}}/dt$ , c'est-à-dire que le théorème du moment cinétique s'applique aux parties orbitales et intrinsèques séparément.

### 8.A.3 Couple dans un champ gravitationnel uniforme

Si la seule force externe en présence provient d'un champ gravitationnel uniforme  $\mathbf{g}$ , alors le couple total s'exerçant sur le système est

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{g} \\ &= \left\{ \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right\} \wedge \mathbf{g} \\ &= M \mathbf{R}_{\text{cm}} \wedge \mathbf{g} \end{aligned} \quad (8.16)$$

Autrement dit, la gravité produit un couple sur l'objet comme si toute la masse de l'objet était concentrée en son centre de masse. Ceci n'est valable que parce que le champ gravitationnel est le même partout dans l'objet. Autrement dit, aux fins de calcul du couple, on peut considérer que la force gravitationnelle agit à la position du centre de masse, pourvu que  $\mathbf{g}$  soit uniforme.

### 8.A.4 Conservation du moment cinétique

La loi de conservation du moment cinétique est très simple : le moment cinétique est conservé si le couple est nul. Cependant, de quel moment cinétique s'agit-il ? Évalué à quel point ? Tout dépend du contexte. Considérons par exemple un objet rigide qu'on lance dans les airs et dont le centre de masse suit une trajectoire parabolique sous l'influence de la gravité  $\mathbf{g}$  uniforme. Le moment cinétique orbital de cet objet n'est manifestement pas conservé. Cependant, son moment cinétique intrinsèque  $\mathbf{J}_{\text{cm}}$  est conservé (on néglige la résistance de l'air), car le couple produit par la gravité s'annule lorsqu'il est évalué au centre de masse : nous avons vu ci-haut que ce couple est  $\mathbf{N} = M \mathbf{R}_{\text{cm}} \wedge \mathbf{g}$  et le vecteur  $\mathbf{R}_{\text{cm}}$  s'annule si l'origine est au centre de masse. Ce n'est donc pas le moment cinétique total qui est conservé dans ce cas, mais uniquement la partie intrinsèque.

Résumons donc les circonstances où un moment cinétique est conservé :

1. Le moment cinétique orbital est conservé si l'objet se déplace dans un champ de force central et si le moment cinétique est évalué au centre d'attraction (placé habituellement à l'origine).
2. Le moment cinétique total d'un système est conservé si le couple total (toujours produit par des forces externes au système) est nul. Cela est certainement le cas si le système est isolé.
3. Le moment cinétique intrinsèque  $\mathbf{J}_{\text{cm}}$  est conservé (même si le moment cinétique total ne l'est pas) si le couple évalué au centre de masse ( $\mathbf{N}_{\text{cm}}$ ) est nul. C'est le cas d'un objet rigide en chute libre dans un champ gravitationnel uniforme.

## B Invariance par rotation et conservation du moment cinétique\*

La relation (8.8) nous dit que le moment cinétique total d'un système fermé est conservé en l'absence de forces externes. Tout comme la conservation de la quantité de mouvement est attribuée à la troisième loi de Newton, elle-même une conséquence de l'invariance par translation, la conservation du moment cinétique est une conséquence de la direction centrale des forces (Éq. (8.6)) qui, elle, est une conséquence de l'invariance par rotation.

L'invariance par rotation signifie que l'espace est isotrope, c'est-à-dire que ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions : il n'y a pas d'axe privilégié par rapport aux autres. Ceci signifie que le potentiel d'interaction d'un système de particules ne dépend pas de l'orientation absolue des positions des particules, mais seulement de leur orientation relative. Exprimons ceci en langage mathématique. Définissons un opérateur de rotation  $\Omega$  qui transforme un vecteur  $\mathbf{r}$  en un autre vecteur  $\mathbf{r}' = \Omega\mathbf{r}$  par l'intermédiaire d'une rotation rigide. Par exemple, si la rotation est effectuée par rapport à l'axe des  $z$ , d'un angle  $\theta$ , on aurait

$$\begin{aligned}\Omega\mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta \\ \Omega\mathbf{e}_y &= -\mathbf{e}_x \sin \theta + \mathbf{e}_y \cos \theta \\ \Omega\mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z\end{aligned}\tag{8.17}$$

L'invariance par rotation de l'énergie potentielle s'exprime alors ainsi :

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = U(\Omega\mathbf{r}_1, \Omega\mathbf{r}_2, \dots, \Omega\mathbf{r}_N)\tag{8.18}$$

On sait par ailleurs que  $U$  se décompose en interaction de paires et ne dépend que de la différence des coordonnées :

$$U = \sum_{i < j} U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\tag{8.19}$$

La condition d'invariance par rotation devient donc

$$U_{ij}(\Omega(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)) = U_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\tag{8.20}$$

Autrement dit, la fonction  $U_{ij}$  ne dépend pas de l'orientation du vecteur  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ . C'est donc qu'elle ne dépend que de sa grandeur  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ , c'est-à-dire de la distance entre les deux particules :

$$U = \sum_{i < j} U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)\tag{8.21}$$

Or, la force d'interaction  $\mathbf{F}_{ij}$  est le gradient de  $U_{ij}$  :

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial U_{ij}(r_{ij})}{\partial \mathbf{r}_{ij}}\tag{8.22}$$

Mais le gradient est nécessairement dirigé dans la direction du vecteur  $\mathbf{r}_{ij}$  si la fonction ne dépend que de la grandeur de ce vecteur. La condition (8.6) s'ensuit, ainsi que la conservation du moment cinétique pour un système isolé.

## C Équilibre statique

On dit d'un objet qu'il est en *équilibre statique* s'il est complètement au repos, c'est-à-dire s'il n'effectue aucun mouvement de translation ou de rotation. Les conditions de cet équilibre sont que la force totale et le couple total (évalué sur un axe quelconque) sur l'objet soient nuls.

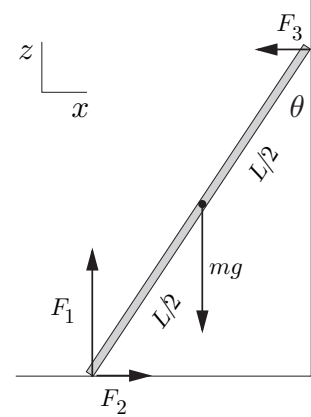


FIGURE 8.1

Échelle en équilibre statique appuyée sur un mur et forces en présence.

Pour illustrer ce concept, considérons l'exemple d'une échelle appuyée contre un mur (voir Fig. 8.1). On suppose que le sol exerce une force de friction sur l'échelle avec un coefficient de friction  $\mu$ . On suppose que le mur est très lisse, de sorte que la force  $F_3$  qu'il exerce sur l'échelle est entièrement normale. Le problème est ici de trouver l'angle critique  $\theta_c$  au-delà duquel l'échelle ne pourra plus être en équilibre.

Pour résoudre ce problème, il faut d'abord identifier les forces agissant sur l'échelle : la gravité  $-mg\mathbf{e}_z$ , la force de réaction du mur  $-F_3\mathbf{e}_x$ , la force normale du sol  $F_1\mathbf{e}_z$  et la force de friction du sol  $F_2\mathbf{e}_x$ . On sait que  $F_2 \leq \mu F_1$ . Les conditions d'équilibre statique sont que la somme des forces et la somme des couples s'annule. La première de ces conditions signifie que chaque composante de la force totale s'annule :

$$mg = F_1 \quad F_3 = F_2 \quad (8.23)$$

Cette condition nous permet d'exprimer  $F_1$  et  $F_2$  en fonction des autres forces. La deuxième de ces conditions s'exprime ainsi, si on choisit comme axe de rotation le point de contact de l'échelle avec le sol :

$$\mathbf{N}_{\text{tot.}} = \left( mg \frac{L}{2} \sin \theta - F_3 L \cos \theta \right) \mathbf{e}_y = 0 \quad (8.24)$$

L'annulation de ce couple total donne  $F_3 = \frac{1}{2} mg \tan \theta$ . Nous avons donc déterminé les trois forces inconnues du problème ( $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$ ).

Notons que la force de frottement statique  $F_2$  ne peut dépasser la valeur  $\mu F_1$  et ceci nous permet de trouver l'angle critique  $\theta_c$  au-delà duquel l'échelle n'est plus en équilibre : on applique la condition de frottement maximal  $F_2 = \mu F_1$ , ou

$$F_3 = \frac{1}{2} mg \tan \theta_c = \mu mg \implies \theta_c = \arctan 2\mu \quad (8.25)$$

On constate que, selon cette formule,  $\theta_c \rightarrow 0$  quand  $\mu \rightarrow 0$  et  $\theta_c \rightarrow \pi/2$  quand  $\mu \rightarrow \infty$ , ce qui est normal.



## D Vitesse angulaire

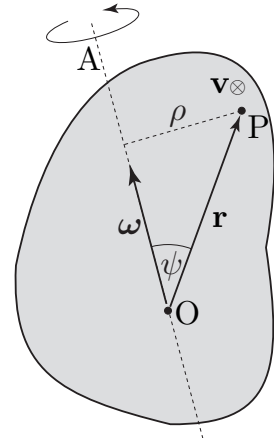
On qualifie un objet de *rigide* si les distances mutuelles des points qui le composent sont fixes dans le temps. Considérons un point quelconque P appartenant à l'objet. Il est assez évident que le mouvement de ce point peut être décrit par rapport à un point de référence O lié à l'objet, et que le mouvement de l'objet dans son ensemble peut être décrit par le mouvement de ce point de référence. Ainsi, si  $\mathbf{R}(t)$  est la position du point P par rapport à un référentiel externe à l'objet (celui de l'observateur),  $\mathbf{R}_0(t)$  la position du point de référence O et  $\mathbf{r}(t)$  la position du point P par rapport à O, on a la relation

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{r}(t) \quad (8.26)$$

Comme l'objet est rigide, le vecteur  $\mathbf{r}$  gardera toujours la même grandeur au cours du temps. Un théorème, que nous ne démontrerons pas ici, stipule que le mouvement de l'objet par rapport au point O est un mouvement de rotation instantané, c'est-à-dire qu'il existe au temps  $t$  un axe A passant par le point O et que tous les points de l'objet décrivent instantanément un mouvement circulaire autour de cet axe. On dit 'instantanément', car l'orientation de A peut changer au cours du temps. Ainsi, le vecteur  $\mathbf{R}_0$  décrit le mouvement de translation de l'objet et le vecteur  $\mathbf{r}$  décrit un mouvement de rotation par rapport au point O. Le point O peut être choisi de manière arbitraire, mais il est généralement pratique de placer le point O au centre de masse de l'objet, en raison de la relation (8.13) : le théorème du moment cinétique s'applique lorsque  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{N}$  sont calculés au centre de masse. Cependant, si l'objet est contraint d'effectuer un mouvement de rotation par rapport à un axe invariable en direction et que le centre de masse n'est pas situé sur cet axe, il est avantageux de placer le point O quelque part le long de cet axe. C'est le cas, par exemple, d'un objet asymétrique fixé à un essieu.

FIGURE 8.2

Schéma illustrant l'orientation du vecteur vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$ .



Nous allons désormais supposer que le point O est fixe et que l'objet rigide est en rotation autour de ce point, de sorte que la position  $\mathbf{r}$  d'un point P est de grandeur constante dans le temps, mais de direction variable. Si  $\rho$  désigne la distance du point P à l'axe A de rotation instantané, le module de la vitesse de P est  $v = \omega \rho$ , où  $\omega$  est la fréquence angulaire de rotation autour de l'axe A. D'autre part, le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  du point P est perpendiculaire au vecteur position  $\mathbf{r}$ , en raison de la longueur fixe de  $\mathbf{r}$  :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0 \quad \text{car} \quad 0 = \frac{d}{dt} \mathbf{r}^2 = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \quad (8.27)$$

La vitesse  $\mathbf{v}$  est aussi perpendiculaire à l'axe de rotation (cet axe est perpendiculaire à l'arc de cercle décrit par le point P). Ces deux facteurs rendent extrêmement utile l'introduction d'un nouveau concept, celui de vecteur *vitesse angulaire*, noté  $\boldsymbol{\omega}$ , dont la définition est la suivante : ce vecteur est parallèle à l'axe de rotation A. Sa grandeur est la fréquence angulaire de rotation  $\omega$ . Sa direction est dictée par la règle de la main droite :

si le sens de rotation est indiqué par les doigts de la main droite, celui de  $\boldsymbol{\omega}$  est indiqué par la direction du pouce. À l'aide de ces définitions, on vérifie que le vecteur vitesse du point P est donné par

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \quad (8.28)$$

En effet, la direction de  $\mathbf{v}$  est alors perpendiculaire à la fois à  $\mathbf{r}$  et à l'axe de rotation, comme il se doit, et sa grandeur est

$$v = \omega |\mathbf{r}| \sin \psi = \omega \rho \quad (8.29)$$

Le vecteur vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  est une caractéristique du mouvement de rotation instantané de l'objet rigide, c'est-à-dire qu'il est commun à tous les points de l'objet.

## E Rotation autour d'un axe fixe

Nous allons considérer dans cette section un objet rigide, maintenu en rotation autour d'un axe invariable, soit par une contrainte mécanique (par exemple, un essieu), soit par un concours favorable de conditions initiales.<sup>2</sup>

Supposons que l'axe de rotation coïncide avec l'axe des  $z$ . Nous allons premièrement démontrer que la composante  $J_z$  du moment cinétique le long de cet axe est proportionnelle à la vitesse angulaire  $\omega$  de rotation :

$$J_z = I \omega \quad (8.30)$$

La constante de proportionnalité  $I$  est appelée *moment d'inertie* et dépend de la distribution de masse de l'objet autour de l'axe de rotation :

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i \rho_i^2 \quad (8.31)$$

Ici,  $\rho_i$  est la coordonnée cylindrique radiale de la  $i^{\text{ème}}$  particule de l'objet. Seule compte dans le moment d'inertie la distance  $\rho$  par rapport à l'axe de rotation.

Pour démontrer ces relations, utilisons la relation (8.28) appliquée à  $i^{\text{ème}}$  particule de l'objet :  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i$ . Le fait que l'objet soit rigide nous assure que la vitesse angulaire est la même (en grandeur et direction) pour toutes les particules qui forment l'objet. Le moment cinétique de l'objet par rapport à un point sur l'axe de rotation est alors

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_i m_i \{ \omega r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \} \end{aligned} \quad (8.32)$$

où nous avons utilisé la formule du double produit vectoriel :  $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ . La composante en  $z$  de cette relation est

$$J_z = \sum_i m_i \{ \omega r_i^2 - z_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \} \quad (8.33)$$

2. Nous verrons plus tard qu'un objet rigide libre de contraintes ne tourne pas, en général, autour d'un axe fixe, même si son moment cinétique est constant.

Comme  $\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega z_i$  et  $r_i^2 = \rho_i^2 + z_i^2$ , on trouve

$$J_z = \sum_i m_i (\omega r_i^2 - \omega z_i^2) = \omega \sum_i m_i \rho_i^2, \quad (8.34)$$

tel qu'annoncé.

Le théorème du moment cinétique, projeté sur l'axe des  $z$ , s'exprime alors comme suit :

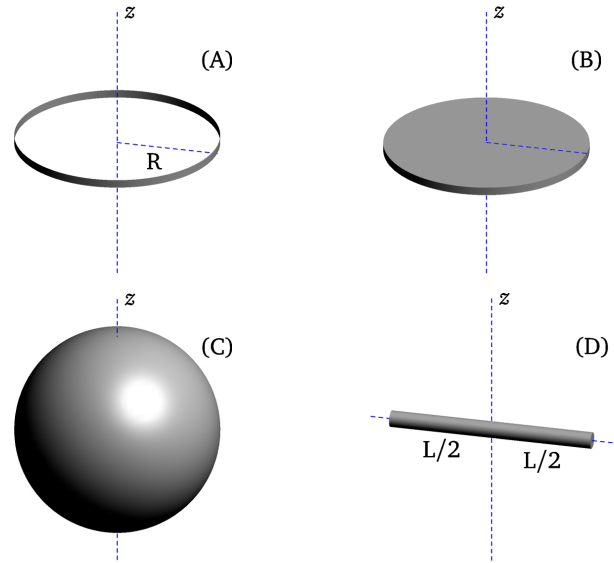
$$N_z = I \frac{d\omega}{dt} \quad (8.35)$$

si le moment d'inertie est constant, c'est-à-dire si l'objet est vraiment rigide et si l'axe de rotation ne change pas dans le temps. Le moment d'inertie est au mouvement de rotation ce que la masse est au mouvement de translation : une mesure de l'inertie d'un objet, de la résistance au mouvement. Pour un couple donné, plus le moment d'inertie est grand, plus l'accélération angulaire  $\dot{\omega}$  sera petite.

Le moment d'inertie d'un objet dépend bien sûr de l'axe de rotation choisi et de l'endroit où cet axe de rotation traverse l'objet. Le moment d'inertie d'un objet continu se calcule de manière assez semblable au centre de masse, en passant à une intégrale. Nous allons maintenant calculer les moments d'inertie de quelques objets simples.

**FIGURE 8.3**

Quelques objets dont on peut facilement calculer les moments d'inertie, par rapport à l'axe indiqué.



#### Exemple 8.1 Moment d'inertie d'un anneau

Considérons un anneau de rayon  $R$  et de masse  $M$  (fig. 8.3A). Calculons le moment d'inertie par rapport à l'axe de l'anneau. Comme tous les points de l'anneau sont situés à égale distance de l'axe de rotation (on néglige ici la largeur de l'anneau), la définition (8.31) donne simplement

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 = R^2 \sum_i m_i = M R^2 \quad (8.36)$$

La même formule s'applique à un cylindre creux d'épaisseur négligeable par rapport à son rayon.

### Exemple 8.2 Moment d'inertie d'un disque ou d'un cylindre

Considérons un disque plein de rayon  $R$  et de masse  $M$  (fig. 8.3B). On peut diviser ce disque en une série d'anneaux concentriques de rayon  $r$  ( $r$  va de 0 à  $R$ ). Chacun de ces anneaux a une largeur  $dr$  et possède une masse  $2\pi\sigma r dr$ , où  $\sigma$  est la densité superficielle (constante) du disque. Le moment d'inertie de l'anneau de rayon  $r$  est donc  $dI = 2\pi\sigma r^3 dr$  et le moment d'inertie total est

$$I = \int_0^R dr 2\pi\sigma r^3 = \frac{1}{2}\pi\sigma R^4 = \frac{1}{2}MR^2 \quad (M = \pi R^2\sigma) \quad (8.37)$$

#### Remarques :

- ♦ Cette expression vaut aussi pour un cylindre de hauteur  $h$ . En fait, la distribution de la masse en fonction de la coordonnée  $z$  parallèle à l'axe de calcul peut être quelconque, car cette coordonnée n'intervient pas dans le calcul du moment d'inertie.
- ♦ Le principe de superposition permet de calculer le moment d'inertie d'un objet pouvant être considéré comme la 'différence' de deux objets. Par exemple, un cylindre creux de rayon intérieur  $a$  et de rayon extérieur  $b$  peut être considéré comme un cylindre plein de rayon  $b$  duquel on a soustrait un cylindre plein de rayon  $a < b$ . Le moment d'inertie d'un tel objet est alors

$$I = \frac{1}{2}\pi\sigma(b^4 - a^4) = \frac{1}{2}\pi\sigma(b^2 - a^2)(b^2 + a^2) = \frac{1}{2}M(b^2 + a^2) \quad (8.38)$$

### Exemple 8.3 Moment d'inertie d'une sphère

Comme troisième exemple, considérons une sphère pleine de rayon  $R$  et de masse  $M$  (fig. 8.3C). On peut diviser cette sphère en une série de disques superposés. Un disque situé à une hauteur  $z$  par rapport au centre ( $z$  va de  $-R$  à  $R$ ) possède une épaisseur  $dz$ , un rayon  $r = \sqrt{R^2 - z^2}$  et une masse  $dM = \mu\pi r^2 dz$  où  $\mu$  est la densité volumique (constante) de la sphère. Le moment d'inertie de chaque disque est

$$dI = \frac{1}{2}dMr^2 = \frac{1}{2}\mu\pi r^4 dz = \frac{1}{2}\mu\pi(R^2 - z^2)^2 dz \quad (8.39)$$

et le moment d'inertie total est obtenu en intégrant sur  $z$  de  $-R$  à  $R$  :

$$I = \frac{1}{2}\mu\pi \int_{-R}^R dz (R^2 - z^2)^2 = \mu\pi \frac{8}{15}R^5 = \frac{2}{5}MR^2 \quad (M = \frac{4}{3}\pi R^3\mu) \quad (8.40)$$

### Exemple 8.4 Moment d'inertie d'une tige

Comme dernier exemple, considérons une tige de longueur  $L$  et de masse  $M$  (fig. 8.3D). On subdivise cette tige en parcelles de longueur  $dx$  et de masse  $\lambda dx$ ,  $\lambda$  étant la densité linéaire (ou masse par unité de longueur) de la tige. Chaque parcelle possède un moment d'inertie  $dI = \lambda x^2 dx$ , où  $x$  est la distance par rapport à l'axe. Le moment d'inertie total est

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} dx \lambda x^2 = \frac{1}{12}\lambda L^3 = \frac{1}{12}ML^2 \quad (8.41)$$

## 8.E.1 Théorème de Huygens

Le *théorème de Huygens* (auss appelé *théorème de l'axe parallèle*) facilite grandement le calcul du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque.

**Théorème 8.2 Huyghens**

Soit  $I_0$  le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de masse et  $I$  le moment d'inertie par rapport à un autre axe, parallèle au premier et à une distance  $d$  de celui-ci. Alors ce théorème stipule que

$$I = I_0 + M d^2 \quad (8.42)$$

La preuve en est simple. Soient  $\mathbf{R}_{\text{cm}}$  la position du centre de masse par rapport à l'axe de rotation,  $\boldsymbol{\rho}_i$  la position de la  $i^{\text{e}}$  particule de l'objet par rapport à l'axe qui nous intéresse et  $\boldsymbol{\rho}'_i$  la position de la  $i^{\text{e}}$  particule de l'objet par rapport à l'axe qui passe par le centre de masse. En fait, tous ces vecteurs sont projetés sur le plan  $xy$  (leur composante en  $z$  est éliminée), de sorte que  $|\mathbf{R}_{\text{cm}}| = d$ . On a bien sûr la relation  $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{R}_{\text{cm}} + \boldsymbol{\rho}'_i$  et le moment d'inertie  $I$  est

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i \rho_i^2 \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{R}_{\text{cm}} + \boldsymbol{\rho}'_i)^2 \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{R}_{\text{cm}}^2 + 2\mathbf{R}_{\text{cm}} \cdot \boldsymbol{\rho}'_i + (\boldsymbol{\rho}'_i)^2) \\ &= M d^2 + 2\mathbf{R}_{\text{cm}} \cdot \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}'_i + I_0 \end{aligned} \quad (8.43)$$

Dans la dernière équation, la somme n'est autre que la projection sur le plan  $z = 0$  de la position du centre de masse et ce, dans le repère où le centre de masse est à l'origine. Cette somme est donc nulle et le résultat recherché s'ensuit.

**Exemple 8.5 Moment d'inertie d'une tige par rapport à son extrémité**

Appliquons le théorème de l'axe parallèle au calcul du moment d'inertie d'une tige de longueur  $L$  par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par l'une de ses extrémités. On trouve alors

$$I = M(L/2)^2 + \frac{1}{12} M L^2 = \frac{1}{3} M L^2 \quad (8.44)$$

Notons que le moment d'inertie par rapport au centre de masse est souvent exprimé de la manière suivante :

$$I_0 = M k^2, \quad (8.45)$$

où  $M$  est la masse de l'objet et où  $k$  est le *rayon de giration* de l'objet ( $k$  a les unités d'une longueur). C'est en fait la distance quadratique moyenne des particules de l'objet à l'axe passant par le centre de masse. Autrement dit,  $k$  est le rayon d'un anneau équivalent ayant la même masse et le même moment d'inertie que l'objet considéré. Bien sûr, le rayon de giration fait référence à une direction particulière pour l'axe de rotation : un objet a des rayons de giration différents dans des directions différentes. En fonction du rayon de giration, le théorème de Huygens s'exprime ainsi :

$$I = M(k^2 + d^2) \quad (8.46)$$

Par exemple, le rayon de giration d'un disque plein de rayon  $R$  est  $\sqrt{\frac{1}{2}} R$ , alors que le rayon de giration d'une sphère pleine de rayon  $R$  est  $\sqrt{\frac{2}{5}} R$ .

## F Énergie cinétique de rotation

Nous allons maintenant démontrer qu'un objet de moment d'inertie  $I$  en rotation à une vitesse angulaire  $\omega$  possède une énergie cinétique  $K_{\text{rot.}}$  associée à cette rotation, donnée par

$$K_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{J_z^2}{2I} \quad (8.47)$$

Démontrons cette relation : l'énergie cinétique est bien sûr donnée par

$$K_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 \quad (8.48)$$

Comme  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i$ , la grandeur de  $\mathbf{v}_i$  est  $v_i = \omega \rho_i$  et donc

$$K_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 \rho_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (8.49)$$

le résultat recherché. Vu que  $J_z = I\omega$ , on peut aussi écrire cette relation comme  $K_{\text{rot.}} = J_z^2 / (2I)$ .

Plus généralement, nous allons maintenant montrer que l'énergie de rotation d'un objet rigide libre de tourner dans toutes les directions est donnée par la relation

$$K_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (8.50)$$

Pour ce faire, calculons le produit scalaire du moment cinétique  $\mathbf{J}_i$  d'une particule de l'objet avec  $\boldsymbol{\omega}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_i \cdot \boldsymbol{\omega} &= m_i (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{v}_i) \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= m_i (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{v}_i \\ &= m_i \mathbf{v}_i^2 \quad (\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (8.51)$$

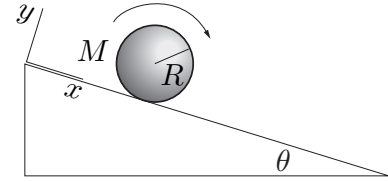
Nous avons utilisé ici la propriété cyclique (11.7) du produit triple et la relation  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i$ . Donc, l'énergie cinétique de rotation de l'objet peut s'écrire

$$K_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{J}_i \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (8.52)$$

ce qui revient à la relation (8.50). Bien sûr, la relation (8.47) en est un cas particulier, applicable lorsque l'axe de rotation est fixe dans la direction  $z$ .

Dans le cas d'un objet qui se déplace en même temps qu'il tourne autour de son centre de masse, par exemple un objet balancé qui roule sur un plan, l'énergie de rotation coïncide avec l'énergie interne qui figure dans le théorème de König. L'énergie cinétique comporte alors deux termes : l'un associée au mouvement du centre de masse (énergie cinétique de translation) et l'autre qu'on calcule par rapport au centre de masse : l'énergie cinétique de rotation.

**FIGURE 8.4**  
Sphère en roulement sur un plan incliné.



### Exemple 8.6 Objet sur un plan incliné

Appliquons la relation (8.47) à l'étude du mouvement d'un objet circulaire (une sphère, un cylindre ou un anneau) en roulement sur un plan incliné, tel qu'illustré sur la figure 8.4. Si l'objet roule sans glisser, sa vitesse de translation et sa vitesse angulaire de rotation sont reliées par la contrainte  $v = \omega R$ . L'énergie cinétique de l'objet, d'après le théorème de König, est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse (l'énergie cinétique de translation  $\frac{1}{2} m v^2$ ) et de l'énergie cinétique par rapport au centre de masse (l'énergie cinétique de rotation  $\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m k^2 \omega^2$ ). L'énergie cinétique totale est donc

$$K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{R^2} \right) m v^2 \quad (8.53)$$

L'énergie totale de l'objet (cinétique et potentielle) est

$$E = \frac{1}{2} m \left( 1 + \frac{k^2}{R^2} \right) v^2 + m g h \quad (8.54)$$

où  $h$  est la hauteur de l'objet par rapport à l'origine (donc négative en pratique). Soit  $x$  la coordonnée du point de contact de l'objet avec le plan, telle que mesurée le long du plan incliné. La vitesse  $v$  est bien sûr définie comme  $v = \dot{x}$ . Si  $\theta$  est l'angle d'inclinaison du plan, on a  $h = -x \sin \theta$ . On peut donc exprimer l'énergie comme

$$E = \frac{1}{2} m \left( 1 + \frac{k^2}{R^2} \right) \dot{x}^2 - m g x \sin \theta \quad (8.55)$$

Comme l'objet roule sans glisser, la force de frottement exercée par le plan sur l'objet n'effectue aucun travail et l'énergie est constante; donc sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$0 = \frac{dE}{dt} = m \left( 1 + \frac{k^2}{R^2} \right) \dot{x} \ddot{x} - m g \dot{x} \sin \theta \quad (8.56)$$

Cette relation nous permet d'isoler l'accélération linéaire de l'objet :

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \theta}{1 + k^2/R^2} \quad (8.57)$$

Le même calcul effectué sur un objet qui glisse sans friction sur un plan incliné donnerait  $\ddot{x} = g \sin \theta$ . Donc, à cause de la contrainte de roulement, le moment d'inertie de l'objet ajoute à son inertie de translation et ralentit la descente de l'objet. Ce facteur de ralentissement est indépendant de la taille de l'objet, et ne dépend que de sa forme. On peut se servir de l'expérience du plan incliné pour mesurer la valeur de  $g$ , mais il faut alors tenir compte de ce facteur, sinon l'analyse donne des résultats complètement erronés. Pour un cylindre creux, un cylindre plein et une sphère, les rapports  $k^2/R^2$  sont respectivement 1,  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{2}{5}$ . Donc si les trois objets sont relâchés en même temps de la même hauteur sur le plan, la sphère arrivera en bas en premier, suivie du cylindre plein et ensuite du cylindre creux. L'exercice 8.8 examine la même situation, mais directement à l'aide du couple, sans faire appel à l'énergie.

## 8.F.1 Relation entre couple et énergie potentielle

Le couple agissant sur un objet peut souvent être calculé à partir de l'expression de l'énergie potentielle de cet objet, sans passer par les forces. Considérons un objet pouvant effectuer une rotation autour de l'axe des  $z$  et supposons que l'énergie potentielle  $U$  de cet objet dépende de son orientation, c'est-à-dire de l'angle

azimutal  $\varphi$  de l'objet par rapport à une direction de référence. Nous allons démontrer que

$$N_z = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} \quad (8.58)$$

Pour ce faire, rappelons que la variation de l'énergie potentielle  $U$  qui accompagne une variation des coordonnées de toutes les particules de l'objet est

$$dU = -\sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i \quad (8.59)$$

Mais, si l'objet est en rotation avec un vecteur vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$ , on peut décrire la différentielle de déplacement comme

$$d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i dt \quad (8.60)$$

Donc

$$dU = -\sum_i \mathbf{F}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i) dt = -\sum_i \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i) dt = -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N} dt \quad (8.61)$$

où  $\mathbf{N}$  est le couple total appliqué en vertu des forces qui découlent de cette énergie potentielle. Comme  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$  et que  $\omega dt = d\varphi$  par définition, on trouve bien  $dU = -N_z d\varphi$ , comme annoncé.

#### Exemple 8.7 Pendule simple

Considérons un pendule simple, comme illustré en page 47. L'énergie potentielle est  $U = -mg\ell \cos \varphi$ . La composante en  $z$  du couple est alors

$$N_z = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mg\ell \sin \varphi \quad (8.62)$$

Par contre, la composante correspondante du moment cinétique est

$$J_z = I\dot{\varphi} = m\ell^2 \dot{\varphi} \quad (8.63)$$

Donc, la relation  $N_z = \dot{J}_z$  mène à l'équation suivante :

$$m\ell^2 \ddot{\varphi} = -mg\ell \sin \varphi \implies \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0 \quad (8.64)$$

ce qui est bien l'équation du pendule (4.15). Dans l'approximation des petits angles, la fréquence d'oscillation  $\Omega$  est donnée par

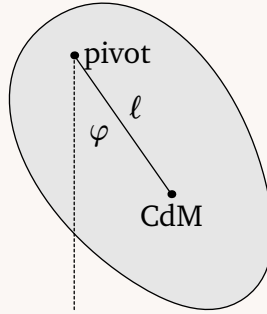
$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (8.65)$$

#### Exemple 8.8 Pendule réel

Considérons ici un pendule *réel* – par opposition à un pendule *simple* – c'est-à-dire un objet de masse  $M$  libre de pivoter par rapport à un point, mais dont la masse n'est pas concentrée en un seul point, mais répartie de manière quelconque, avec un moment d'inertie  $I_0$  par rapport à son centre de masse et une distance  $\ell$  entre le centre de masse



et le pivot (voir figure : l'axe de rotation sort de la page).



Supposons que l'axe du pivot est l'axe  $\mathbf{e}_z$ . L'énergie potentielle du pendule ne dépend que de la hauteur du centre de masse et a la même expression que pour le pendule simple :  $U = -mg\ell \cos \varphi$ . La composante  $J_z$  du moment cinétique évalué au pivot est

$$J_z = I\dot{\varphi} \quad I = I_0 + M\ell^2 \quad (8.66)$$

L'équation du mouvement pour l'angle  $\varphi$  est donc

$$N_z = \dot{J}_z \implies I\ddot{\varphi} = -Mg\ell \sin \varphi \quad (8.67)$$

Encore une fois, il est possible de résoudre facilement cette équation différentielle si l'angle d'inclinaison  $\varphi$  est petit, de sorte que  $\sin \varphi \approx \varphi$  :

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mg\ell}{I} \varphi = 0 \quad (8.68)$$

La solution générale de cette équation est

$$\varphi(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \quad \Omega \equiv \sqrt{\frac{Mg\ell}{I}} \quad (8.69)$$

Le mouvement du pendule est alors harmonique, comme dans le cas du pendule simple, mais l'expression de sa fréquence en fonction de la masse du pendule est différente. En fonction du rayon de giration du pendule et de la position du centre de masse, le moment d'inertie par rapport au pivot est  $I = M(k^2 + \ell^2)$ , ce qui nous permet d'écrire la fréquence d'oscillation comme

$$\Omega = \sqrt{\frac{g\ell}{k^2 + \ell^2}} \quad (8.70)$$

Plus le rayon de giration  $k$  est petit par rapport à  $\ell$ , plus le pendule physique ressemble à un pendule simple, dont la fréquence d'oscillation est  $\Omega = \sqrt{g/\ell}$ .

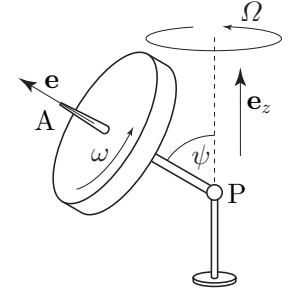
## G

## Mouvement de précession

À moins qu'un objet rigide ne soit contraint de tourner sur un axe fixe ou qu'aucun couple ne s'exerce sur lui, son moment cinétique  $\mathbf{J}$  n'est en général pas constant en direction. Le cas le plus simple d'une variation dans l'espace du moment cinétique est celui d'un mouvement de précession, causé par un couple perpendiculaire au moment cinétique.

L'exemple canonique est celui du gyroscope monté sur un pivot fixe (P), tel qu'illustré à la fig. 8.5. Soit  $m$  la masse de cet objet,  $I$  son moment d'inertie par rapport à son axe de symétrie (A) et  $h$  la distance entre le centre de masse et le pivot. Le gyroscope est en rotation sur son axe à une vitesse angulaire  $\omega$ . Dans cette configuration, l'objet subit un couple. En effet, plaçons l'origine au pivot P. La seule force contribuant au couple est alors le poids  $mg$  de l'objet, qui s'applique au centre de masse, et la grandeur du couple produit

**FIGURE 8.5**  
Schéma du gyroscope en précession.



est  $mgh \sin \psi$ . Ce couple est perpendiculaire à la fois à la verticale et à l'axe A : tel qu'illustré, il sort à peu près de la page.

Le moment cinétique de l'objet est essentiellement dirigé le long de l'axe A. En fait, on doit faire ici l'approximation que la rotation du gyroscope sur son axe est rapide en comparaison du mouvement de précession, de sorte qu'on peut négliger toute autre contribution au moment cinétique. Dans cette approximation, le moment cinétique est  $\mathbf{J} = I\omega\mathbf{e}$ , où  $\mathbf{e}$  est un vecteur unitaire dirigé le long de l'axe du gyroscope, comme illustré. Le couple peut alors s'exprimer comme

$$\mathbf{N} = -\Omega \mathbf{J} \wedge \mathbf{e}_z, \quad \text{où} \quad \boxed{\Omega = \frac{mgh}{I\omega}} \quad (8.71)$$

Cette relation représente bien la direction et la grandeur du couple. Remarquons que si  $\omega$  est négatif, ce qui signifie que le gyroscope tourne sur lui-même dans la direction opposée de celle illustrée, alors  $\Omega$  et  $\mathbf{J}$  changent de signe, ce qui laisse  $\mathbf{N}$  inchangé, comme il se doit. Le théorème du moment cinétique nous permet ensuite de déterminer le mouvement de l'axe de rotation :

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = -\Omega \mathbf{J} \wedge \mathbf{e}_z \quad (8.72)$$

Comme  $\dot{\mathbf{J}}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{J}$ , la grandeur de  $\mathbf{J}$  est constante : seule sa direction change. Cette équation est identique à celle de la vitesse d'une particule chargée dans un champ magnétique  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \omega_c \mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_z \quad (8.73)$$

Dans ce cas, nous savons que la composante  $v_z$  de la vitesse demeure constante, alors que la composante horizontale  $v_\perp$  décrit un cercle à la fréquence cyclotron  $\omega_c$ , dans le sens horaire si  $\omega_c > 0$ . Ici, la solution est la même, sauf pour le sens de la précession ( $\omega_c$  est remplacé par  $-\Omega$ ) :

$$\mathbf{J} = J_z \mathbf{e}_z + J_\perp (\mathbf{e}_x \cos \Omega t + \mathbf{e}_y \sin \Omega t) \quad (8.74)$$

où  $J_\perp = J \sin \psi$  est la grandeur de la projection sur le plan  $xy$  du moment cinétique  $\mathbf{J}$  et  $\Omega$ , donné plus haut, est la fréquence de précession du vecteur moment cinétique autour de la verticale.

#### Remarques :

- ♦ Plus la toupie tourne rapidement sur elle-même, plus la précession est lente. En fait, la formule ci-haut n'est valable que dans l'approximation  $\omega \gg \Omega$ , ou encore  $I\omega^2 \gg mgh$ , ce qui revient à dire que l'énergie cinétique de la toupie est beaucoup plus grande que son énergie potentielle (par rapport au pivot). C'est le cas d'une toupie dite *rapide*. En effet, dans notre démonstration, nous avons négligé une partie du moment cinétique : celui associé à la précession elle-même, et donc l'axe de rotation instantané de l'objet n'est pas exactement son axe de symétrie. Nous avons aussi négligé la nutation de la toupie (voir section 9.C), c'est-à-dire le fait que le moment cinétique n'est pas exactement parallèle

à l'axe instantané de rotation. Une étude plus exacte du problème révèle que la précession uniforme étudiée ici n'est possible que si la condition suivante est respectée :

$$I\omega^2 > 4 \frac{I'}{I} mgh \cos \psi \quad (8.75)$$

où  $I'$  est le moment d'inertie de la toupie par rapport à un axe perpendiculaire à son axe de symétrie.

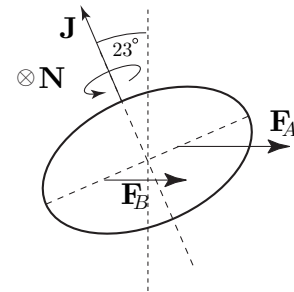
- ♦ La fréquence de précession est indépendante de l'angle d'inclinaison  $\psi$  par rapport à la verticale.

### 8.G.1 Précession des équinoxes

L'un des plus anciens exemples connus de mouvement de précession est celui de la Terre elle-même. En effet, le moment cinétique intrinsèque de la Terre effectue un mouvement de précession autour du pôle de l'écliptique, un tour complet étant effectuée en 25 780 ans, ce qui correspond à un déplacement angulaire de 50,26'' par année. Ce mouvement se manifeste par un déplacement lent du *point vernal*, c'est-à-dire du point de rencontre entre l'*équateur* (la trajectoire apparente du Soleil sur la voûte céleste) et l'équateur céleste. C'est bien sûr l'équateur céleste qui, comme l'axe de la Terre, change d'orientation au cours du temps. Ce déplacement du point vernal, ou *précession des équinoxes*, fut noté dès le II<sup>e</sup> siècle avant notre ère par l'astronome grec Hipparque, à la suite d'observations minutieuses et de comparaisons avec des observations effectuées un siècle et demi auparavant. La conséquence astronomique la plus immédiate de la précession des équinoxes est que l'étoile Polaire n'indique pas le pôle Nord terrestre de manière permanente, mais seulement à notre époque. Dans douze mille ans, c'est Véga (dans la Lyre) qui tiendra à peu près ce rôle. La constellation du zodiaque dans laquelle se produit l'équinoxe de printemps change aussi avec le temps. Présentement, le Soleil, au 21 mars, se trouve dans la constellation des Poissons, et ce pour encore un demi-millénaire, en dépit de ce que peuvent penser les adeptes de l'âge du Verseau. Il y a 2000 ans, le Soleil se trouvait plutôt dans la constellation du Bélier, etc.<sup>3</sup>

FIGURE 8.6

Cause du couple dans la précession des équinoxes. Seul l'effet du Soleil est illustré, au solstice d'hiver.



La précession des équinoxes ne reçut une explication correcte qu'avec les *Principia* de Newton. L'explication de base est simple : la Terre n'est pas parfaitement sphérique, mais légèrement aplatie. De plus, son axe de rotation fait un angle de 23°27' avec l'axe de l'écliptique. Ces deux facteurs font que le Soleil et la lune exercent un couple sur la Terre. En effet, considérons la figure ci-contre et supposons que le centre d'attraction (disons, le Soleil) soit situé loin vers la droite (l'aplatissement de la Terre a été grossièrement exagéré aux fins de l'argument). On peut grosso modo considérer que le Soleil exerce une force  $F_A$  sur la moitié droite de la Terre et une force plus faible  $F_B$  sur la moitié gauche (plus faible parce que cette moitié est plus éloignée du Soleil). On constate alors que l'effet combiné de ces deux forces est bien un couple  $N$  qui rentre dans la page, tel qu'indiqué. Notons que nous avons illustré la Terre à un solstice. À l'équinoxe, le couple est nul. Par contre, au solstice suivant, le couple est encore dans la même direction. Au total, il y a un couple moyen non nul agissant sur la Terre et c'est ce couple qui cause la précession des équinoxes. L'argument imagé donné

3. La précession des équinoxes est l'un des arguments les plus courants pour réfuter les prétentions des astrologues qui associent une influence à chaque constellation, en rapport avec la position du Soleil lors de la naissance d'un individu. Comme leurs pratiques à cet effet n'ont pas changé depuis 2000 ans, le ridicule en est évident. Mais c'est manifester trop de bonne volonté que d'utiliser des arguments aussi sophistiqués pour réfuter l'astrologie.

ci-haut est peu rigoureux et l'importance de l'aplatissement de la Terre n'y est pas très explicite. Il est cependant évident que si la Terre était parfaitement sphérique le couple serait nul, ne serait-ce que par symétrie. D'un autre côté, ce couple apparaît clairement dans le cas d'une Terre aplatie à l'extrême.

Un argument plus sophistiqué permet de démontrer que la fréquence de précession est

$$\Omega = -\frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega} \frac{I_3 - I_1}{I_3} \cos \theta \quad (8.76)$$

où  $\omega_0$  est la fréquence de révolution de la Terre autour du Soleil,  $\omega$  est la fréquence de rotation de la Terre sur elle-même,  $I_3$  est le moment d'inertie de la Terre par rapport à son axe polaire,  $I_1$  le moment d'inertie par rapport à un axe passant par l'équateur et  $\theta$  l'inclinaison de l'axe terrestre ( $23^\circ 27'$ ). Cette formule prédit une période de précession de 81 000 ans. En réalité, la lune produit un couple environ deux fois plus grand que celui du Soleil, et l'effet combiné des deux astres produit une précession de 25 780 ans de période.

## 8.G.2 Précession des spins nucléaires

Un autre mouvement de précession, plus moderne celui-là, joue un rôle important, notamment dans l'imagerie médicale : la précession des spins nucléaires dans un champ magnétique. Indiquons ici que la plupart des noyaux atomiques ont un moment cinétique intrinsèque (appelé spin nucléaire) et que ce moment cinétique porte aussi ce qu'on appelle un *moment magnétique*. Grosso modo, le moment magnétique est un vecteur  $\mathbf{M}$  caractérisant un aimant microscopique : sa direction est celle du pôle magnétique de l'objet et sa grandeur caractérise la force de cet aimant (une définition plus rigoureuse se trouve dans les cours d'électromagnétisme, en fonction de boucles de courants). Le moment magnétique d'un noyau est proportionnel à son moment cinétique intrinsèque (spin) :  $\mathbf{M} = \gamma \mathbf{J}$ , où  $\gamma$  est le *facteur gyromagnétique* du noyau. Or, l'une des propriétés fondamentales des aimants est justement de s'aligner dans la direction du champ magnétique. L'énergie potentielle d'un moment magnétique  $\mathbf{M}$  dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$  est

$$U = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = -MB \cos \theta \quad (8.77)$$

où  $\theta$  est l'angle entre le moment et le champ magnétique. Le champ magnétique produit donc un couple sur le moment magnétique, couple qu'on peut exprimer comme suit :

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{B} \quad \text{ou} \quad N = MB |\sin \theta| \quad (8.78)$$

Ce couple cause une précession du spin nucléaire, en vertu du théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \gamma \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} = \gamma B \mathbf{J} \wedge \mathbf{e}_z \quad (\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z) \quad (8.79)$$

On retrouve l'équation (8.72), sauf qu'ici elle est exacte et non pas le résultat d'une approximation de rotation rapide. On en conclut à un mouvement de précession du spin nucléaire, avec fréquence

$$\omega_L = \gamma B \quad (8.80)$$

appelée *fréquence de Larmor*.

## 8.G.3 Résonance magnétique

Ce mouvement de précession est à la base de la technique d'imagerie par résonance magnétique. Expliquons sommairement. Il est possible de faire entrer le mouvement de précession de fréquence  $\omega_L$  en résonance avec un champ magnétique supplémentaire (en plus du champ constant  $B$ ), oscillant à une fréquence  $\omega$ . Ce champ oscillant transfère de l'énergie au mouvement de précession et en augmente l'amplitude. L'énergie

transférée est maximale quand la condition de résonance  $\omega = \omega_L$  est atteinte. Cette énergie est ensuite transférée à l'environnement des noyaux. L'important ici est que la fréquence de résonance  $\omega_L$  peut être mesurée précisément. Or, un noyau subit, en plus du champ magnétique appliqué, un champ magnétique local produit par les nuages électroniques de l'atome, qui s'ajoute au champ appliqué et qui change donc la valeur de la fréquence de résonance. Mesurer la fréquence de résonance permet donc de mesurer ce champ magnétique local, qui change d'une espèce de molécule à l'autre et d'un atome à l'autre dans la molécule. On peut ainsi tracer la concentration de certains éléments (en particulier l'hydrogène) dans un objet, simplement en identifiant la fréquence de résonance (ou en mesurant l'absorption d'énergie magnétique). En particulier, en balayant le corps d'un patient à l'aide du champ magnétique variable et en mesurant l'absorption d'énergie, on obtient des images tridimensionnelles claires de la concentration d'hydrogène dans les tissus, sans aucune intrusion mécanique. Mentionnons aussi que cette technique de résonance magnétique nucléaire<sup>4</sup> est aussi extrêmement importante en analyse chimique. Remarquons enfin qu'un traitement rigoureux de ce phénomène de résonance magnétique doit être fait dans le cadre de la mécanique quantique, puisqu'il s'agit ici d'objets microscopiques. La mécanique classique permet cependant d'en entrevoir le fonctionnement.

## H Mouvement libre d'un objet rigide\*

Dans cette section, nous considérons un objet rigide et étudions la relation entre le moment cinétique et la vitesse angulaire de l'objet en rotation, sans que l'axe de rotation soit contraint par un essieu ou un autre dispositif.

### 8.H.1 Matrice d'inertie

On montre que le déplacement d'un objet rigide peut toujours être caractérisé par une translation de son centre de masse, plus une rotation par rapport à son centre de masse. À un instant donné, l'état de mouvement d'un objet rigide est donc spécifié par la vitesse  $\mathbf{V}_{\text{cm}}$  de son centre de masse et une certaine vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  qui généralement change avec le temps. Revenons maintenant à la relation (8.32) et exprimons-la en composantes, sans supposer que  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$  :

$$\begin{aligned} J_x &= \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i \\ J_y &= -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i \\ J_z &= -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned} \quad (8.81)$$

Cette relation est en fait matricielle :

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{J} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (8.82)$$

où la matrice  $\mathbf{I}$  aux composantes  $I_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = x, y, z$ ) est appelée *matrice d'inertie* ou *tenseur d'inertie*. Les composantes de cette matrice dépendent de la forme particulière de l'objet et dépendent en général du temps si

4. On dit maintenant «résonance magnétique». On a laissé tomber l'épithète «nucléaire», probablement parce qu'elle véhicule des craintes au sujet de la radioactivité, alors que la technique n'a rien à voir avec des processus radioactifs. Ce sont simplement les spins des noyaux qui précessent, par opposition à ceux des électrons.

l'objet est en rotation et si on les calcule par rapport à des axes fixes dans l'espace. On utilise ici, et exceptionnellement, la notation habituelle de l'algèbre linéaire pour désigner une matrice et des vecteurs colonnes ou rangées. Ainsi le symbole  $\mathbf{I}$  désigne la matrice d'inertie, le symbole  $\mathbf{J}$  désigne un vecteur colonne dont les composantes sont celles du moment cinétique, etc.

L'important ici est de réaliser que la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  n'est en général pas parallèle au moment cinétique  $\mathbf{J}$ . Lorsqu'un objet rigide est projeté dans les airs et qu'aucun couple n'agit sur lui ( $\mathbf{N}_{\text{cm}} = 0$ ), le moment cinétique  $\mathbf{J}_{\text{cm}}$  est conservé, mais la vitesse angulaire de l'objet n'est pas constante, sauf sous des conditions initiales particulières. On peut montrer par une analyse plus poussée que le vecteur vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  tourne (ou précesse) alors autour du vecteur moment cinétique  $\mathbf{J}$ . Ce mouvement est appelé *nutation*. Un tel mouvement de nutation est aussi observé sur une toupie en précession.

Ce mouvement de nutation a aussi été observé sur la Terre dans son ensemble, même si on ne peut pas exactement considérer la planète comme un objet rigide. On a pu observer que l'axe du pôle Nord n'est pas constant, mais a un mouvement de nutation dont l'amplitude est relativement petite (une quinzaine de mètres à la surface du pôle Nord; voir la section 9.C).

## 8.H.2 Axes fixes à l'objet

Il est souvent commode d'utiliser un système d'axes fixes par rapport à l'objet, c'est-à-dire qui tourne avec l'objet, et dont l'origine est au centre de masse de l'objet. Bien sûr, ces axes définissent un référentiel tournant et donc non inertiel. Du point de vue de ces axes, l'objet n'est pas en rotation : c'est l'environnement qui l'est. Un vecteur constant du point de vue du laboratoire est en rotation du point de vue de ces axes. De ce point de vue, le moment cinétique  $\mathbf{J}$  est donc toujours constant en grandeur, mais pas en direction. L'avantage de ce système d'axes est que les composantes de la matrice d'inertie sont constantes dans le temps. En particulier, étant donné que la matrice d'inertie est symétrique (c'est-à-dire  $I_{xy} = I_{yx}$ , etc.), elle peut être diagonalisée, c'est-à-dire qu'il existe un système de trois axes perpendiculaires, liés à l'objet, tels que la matrice d'inertie calculée en utilisant ces axes est diagonale :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (8.83)$$

Les trois coefficients  $I_{1,2,3}$  sont appelés *moments d'inertie* de l'objet. Les moments d'inertie caractérisent la façon dont la masse de l'objet se répartit autour des axes. Les axes en question sont appelés *axes principaux* de l'objet. Pour certains objets, les axes principaux sont évidents. Par exemple, les axes principaux d'un parallélépipède sont les axes perpendiculaires aux trois faces passant par le centre de masse. Pour un cylindre, l'axe du cylindre est l'un des axes principaux, alors que les deux autres sont perpendiculaires au premier et perpendiculaires entre eux. Pour une sphère, tout ensemble de trois axes mutuellement perpendiculaires passant par le centre de masse sont des axes principaux.

## 8.H.3 Énergie de rotation

Nous avons vu que la relation entre  $\mathbf{J}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  est  $\mathbf{J} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$  où  $\mathbf{I}$  est la matrice d'inertie. On peut donc écrire l'énergie cinétique de rotation (8.50) comme

$$K_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^t \mathbf{J} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^t \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (8.84)$$

où  $\boldsymbol{\omega}^t$  est le vecteur rangée, transposé du vecteur colonne  $\boldsymbol{\omega}$ . De manière équivalente, vu que  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{J}$ , on a

$$K_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} \mathbf{J}^t \mathbf{I}^{-1} \mathbf{J} \quad (8.85)$$

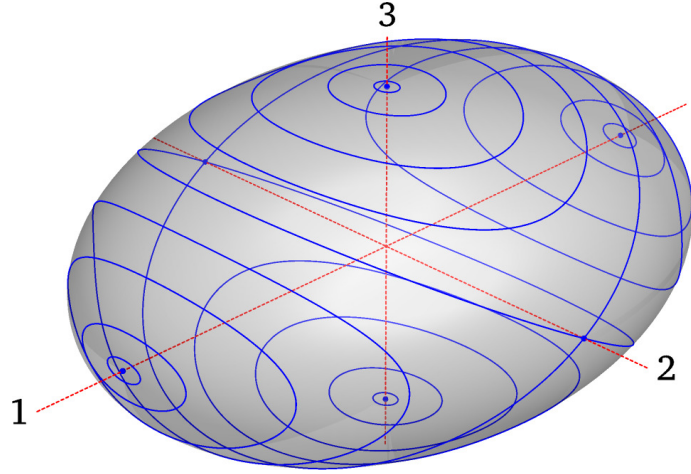
(les expressions ci-haut sont la multiplication d'un vecteur rangée par une matrice et puis par un vecteur colonne). Dans le système des axes principaux liés à l'objet, la matrice  $I$  est diagonale et l'énergie cinétique de rotation prend la forme

$$K_{\text{rot.}} = \frac{J_1^2}{2I_1} + \frac{J_2^2}{2I_2} + \frac{J_3^2}{2I_3} \quad (8.86)$$

où les coefficients  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont les moments d'inertie de l'objet par rapport aux trois axes principaux. Notez cependant que les composantes  $(J_1, J_2, J_3)$  du moment cinétique dans ce système d'axes ne sont en général pas constantes, car ces axes sont en général en mouvement.

**FIGURE 8.7**

L'ellipsoïde de Binet et le mouvement du moment cinétique dans le repère des axes fixes à l'objet. Les trois axes principaux (1, 2 et 3) sont indiqués, ainsi que les trois ellipses coupant les trois plans (12), (13) et (23). Les courbes noires sont les intersections de l'ellipsoïde avec des sphères de plus en plus petites.



En fonction des composantes  $(J_1, J_2, J_3)$  du moment cinétique dans le repère des axes principaux, la conservation de l'énergie cinétique de rotation décrit un ellipsoïde, appelé *ellipsoïde de Binet*, spécifié par l'éq. (8.86). D'autre part, la conservation du moment cinétique dans l'espace se traduit par un vecteur  $(J_1, J_2, J_3)$  de longueur constante, dont l'extrémité se déplace sur la surface d'une sphère de rayon  $|\mathbf{J}|$  dont l'équation est

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = |\mathbf{J}|^2 \quad (8.87)$$

Le vecteur  $(J_1, J_2, J_3)$  se déplace donc sur l'intersection d'une sphère et d'un ellipsoïde. Cette vision géométrique aide à comprendre pourquoi la rotation d'un objet par rapport à un axe principal est stable dans le cas du moment d'inertie minimum (disons  $I_1$ ) et du moment d'inertie maximum (disons  $I_3$ ), mais instable dans le cas du moment d'inertie moyen (disons  $I_2$ ). Ceci est illustré à la Fig. 8.7.

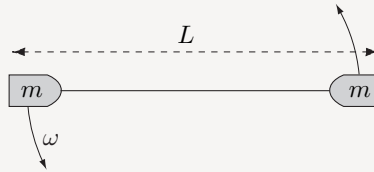
## Problèmes

### Problème 8.1

Supposons qu'une version 'économique' de la station spatiale ait été mise en orbite. Elle est constituée de deux modules identiques de masse  $m$ , reliés l'un à l'autre par un long filin de longueur  $L$ . L'ensemble tourne à une vitesse angulaire  $\omega$  par rapport au milieu du filin (le centre de masse), ce qui cause une gravité artificielle dans chacun des modules. On peut ici négliger l'influence de la Terre, de sorte que le référentiel de la station est approximativement inertiel.

**A** Quelle est la tension du filin, en fonction de  $m$ ,  $L$  et  $\omega$ ?

**B** Par accident, les fusées d'appoint de l'un des modules se mettent en marche, à puissance maximale, pendant un très court laps de temps, donnant au module une impulsion supplémentaire  $P$  dans le sens de sa vitesse à ce moment-là. Décrivez le mouvement subséquent de la station : donnez la vitesse  $V$  du centre de masse de la station, en supposant qu'elle était nulle au départ (on se place dans le référentiel initial de la station) et la nouvelle vitesse angulaire  $\omega'$ , si elle est différente de  $\omega$ .



### Problème 8.2

Démontrez que si on suspend un objet rigide par un fil, l'objet s'oriente de sorte que son centre de masse est situé sur le prolongement du fil.

### Problème 8.3

Une automobile de masse  $M$  repose horizontalement sur ses quatre roues. Le sol exerce une force  $F_1$  sur chacune des deux roues arrière et  $F_2$  sur chacune des deux roues avant. La distance entre les roues arrière et avant est  $d$ . À quelle distance horizontale  $d_2$  des roues avant se situe le centre de masse de l'automobile? (rép.  $d_2 = 2F_1 d / Mg$ )

### Problème 8.4

Laurel et Hardy repeignent leur maison. Ils ont posé une échelle, en oblique, contre la façade.

**A** Hardy commence à monter. «Attention, lui dit Laurel, l'échelle est trop oblique, elle va finir par glisser.» – «Idiot, répond Hardy, si elle tient quand je suis sur le troisième barreau, elle tiendra aussi bien quand je serai sur le dernier.» A-t-il raison?

**B** Arrivé au milieu de l'échelle, Hardy prend peur et se rend aux raisons de Laurel. Il redescend et dit



à Laurel : «Puisque tu es si malin, vas-y donc toi-même. Comme tu es plus léger, tu as plus de chances d'arriver en haut sans que l'échelle glisse.» A-t-il raison ?

On peut supposer pour simplifier que seul le frottement sur le sol, et non sur le mur, peut assurer la stabilité de l'échelle.

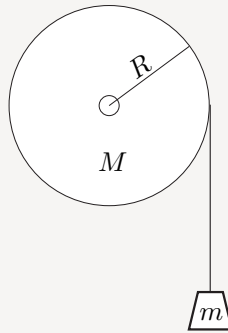
[question tirée de *La physique en question*, par J.-M. Lévy-Leblond, Éd. Vuibert, 1980.]

### Problème 8.5

Calculez le moment cinétique du Soleil attribuable à sa rotation sur lui-même. Évaluez ensuite le moment cinétique orbital de Jupiter. Lequel est le plus élevé ? Utilisez pour ce faire le moment d'inertie d'une sphère et les valeurs tabulées des distances astronomiques et des périodes de rotation.

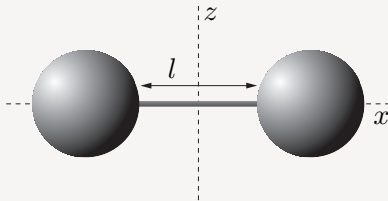
### Problème 8.6

Un poids de masse  $m$  est suspendu à un fil enroulé autour d'une poulie (pleine) de masse  $M$  et de rayon  $R$ . Ce poids tombe sous l'effet de la gravité. Montrez que l'accélération du poids vers le bas est  $g/(1 + M/2m)$ .



### Problème 8.7

Un objet a la forme d'un haltère formé de deux sphères de rayon  $r$  séparées par une tige de longueur  $\ell$  (distance entre les surfaces et non pas les centres des deux sphères) et d'épaisseur négligeable (voir figure). Calculez le moment d'inertie  $I$  de cet objet par rapport à l'axe des  $x$  et par rapport à l'axe des  $z$ . Supposez que la masse de chacune des sphères est  $M$  et que la masse de la tige est  $m$ . Les axes passent tous les deux par le centre de l'objet.



### Problème 8.8

Un objet circulaire de rayon  $R$  et de rayon de giration  $k$  roule sans glisser sur un plan incliné à un angle  $\theta$ , sous l'influence de la gravité, tel qu'illustré à la figure 8.4. L'objet peut être (i) une sphère (ii) un cylindre plein ou (iii) un anneau (la valeur de  $k$  change, selon le cas). Adoptons des axes  $x$  et  $y$  tel qu'indiqués. Calculez l'accélération  $\ddot{x}$  de l'objet le long du plan pour une valeur quelconque de  $k$ . Exprimez votre réponse en fonction de  $g$ ,  $\theta$ ,  $k$  et  $R$ . Que vaut l'accélération pour les trois objets énumérés ci-dessus, en fonction de  $g$  et  $\theta$ ?

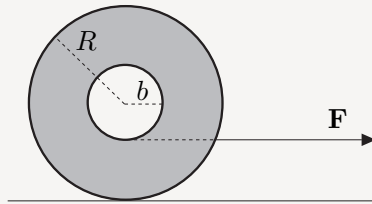
Note : Ne résolvez pas ce problème à l'aide de la conservation de l'énergie, mais en vous servant des principes fondamentaux ( $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  et  $\mathbf{N} = \mathbf{J}$ ). La contrainte de roulement est importante.

### Problème 8.9

Un yo-yo de masse  $m$  a un axe intérieur de rayon  $b$  (autour duquel s'enroule la corde), un rayon extérieur  $R$  et un moment d'inertie  $I$ . Le yo-yo est placé sur une table et on tire la corde horizontalement avec une force  $F$  de sorte que la corde s'enroule autour de l'axe intérieur en même temps que le yo-yo s'approche, en roulant sans glisser.

**A** Quelle est la force de frottement  $F_{\text{fr}}$ , qui s'exerce au point de contact entre le sol et le yo-yo? Cette force est-elle plus grande ou plus petite que  $F$ ? Si on suppose que le yo-yo a le même moment d'inertie qu'un disque, que devient cette formule?

**B** Si le coefficient de friction statique est  $\mu$ , quelle est la force maximum  $F$  au-delà de laquelle le yo-yo commence à glisser sur la table?

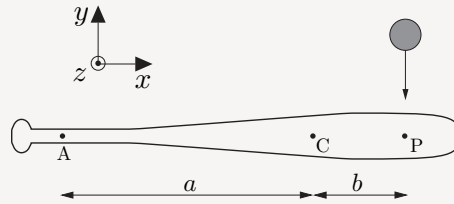


### Problème 8.10

Au baseball, lorsqu'un batteur frappe la balle, il doit instinctivement choisir le bon point d'impact P pour ne pas sentir une trop grande réaction du bâton sur ses mains. Dans ce problème, nous idéalisons un peu cette situation et supposons que l'impact de la balle se produit au point P, à une distance  $b$  du centre de masse C, alors que le bâton est tenu au point A, à une distance  $a$  du centre de masse. On écrit le moment d'inertie du bâton par rapport à un axe (sortant de la page) passant par C comme  $I_0 = Mk^2$ , où  $k$  est le rayon de giration du bâton. Trouvez la relation entre  $a$ ,  $b$  et  $k$  pour que la réaction du bâton au point A soit nulle.

Indice : supposez que la bâton est dans l'espace, sans que personne ne le tienne, et que la balle entre en collision avec lui au point P. Après la collision, le bâton aura un mouvement de translation et un mouvement de rotation par rapport à son centre de masse. Utilisez la conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique pour déterminer la position du point A dont la vitesse sera nulle immédiatement

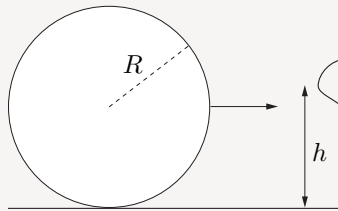
après la collision. Expliquez pourquoi c'est à ce point que le batteur devrait tenir le bâton.



### Problème 8.11

Une boule de billard de rayon  $R$  roule sans glisser sur le tapis et rebondit sur le bord de la table, où elle percute un bourrelet à une hauteur  $h$ . Quelle doit être la valeur de  $h$  pour que la boule rebondisse sans glisser le moins sur la surface de la table? Vous devez supposer que la force exercée par le bourrelet sur la boule est horizontale.

Indice : la force  $F$  exercée par le bourrelet sur la boule dépend du temps d'une manière compliquée, mais cela n'a pas d'importance puisque c'est l'impulsion donnée à la boule par le bourrelet qui compte. De même, le moment cinétique donné à la boule par le bourrelet est proportionnel à cette impulsion.



### Problème 8.12

Les phénomènes en jeu au billard peuvent assez bien se comprendre une fois qu'on tient compte de la rotation des boules et du frottement avec le tapis. Considérons un cas très simple : la boule blanche roule sans glisser, à une vitesse  $v_0$ , et entre en collision avec une autre boule initialement au repos. Pour simplifier, nous supposons que le paramètre d'impact est nul, de sorte que le mouvement de translation des deux boules s'effectue en une dimension. Cependant, le processus de collision est si rapide, qu'il n'affecte que les vitesses des boules, sans affecter de manière immédiate leurs vitesses angulaires, de sorte qu'immédiatement après la collision, les deux boules glissent sur le tapis (la condition de roulement n'est pas satisfaite). En supposant une force de frottement dynamique  $f$  au contact du tapis et des boules, obtenez une expression pour les vitesses finales des deux boules ( $v'$  et  $v''$ ), après que le frottement ait fait son oeuvre, et calculez la fraction de l'énergie initiale perdue en raison de l'action des forces de frottement. Notez que toutes les boules ont la même masse et le même rayon.

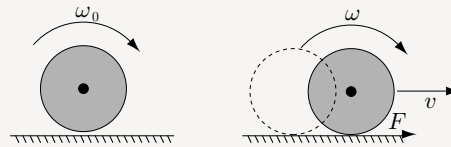
Indice : la force de frottement ne s'applique que s'il y a glissement des boules sur le tapis et elle disparaît aussitôt que la contrainte de roulement est satisfaite. Dans le temps que cette force existe, elle produit un couple qui modifie la vitesse angulaire de chaque boule, en même temps que cette force les accélère (ou décélère). Il est pratique de trouver en un premier temps le temps  $\tau$  pendant lequel cette force s'applique. Les vitesses finales sont des fractions simples de la vitesse initiale  $v_0$ .

**Problème 8.13**

Une roue de rayon  $R$ , de masse  $m$  et de moment d'inertie  $I = mk^2$  (par rapport à son axe) est maintenue en rotation à une vitesse angulaire  $\omega_0$ , tout juste au-dessus du sol. À  $t = 0$ , on la laisse tomber librement en contact avec le sol. Alors elle glisse tout en accélérant vers la droite : le sol exerce sur elle une force de frottement  $F$  constante qui l'accélère, en même temps que sa vitesse angulaire diminue. Après un temps  $T$ , elle a suffisamment accéléré, et sa vitesse angulaire a suffisamment diminué, pour que la contrainte de roulement soit satisfaite et elle roule désormais sans glisser. Aucune force de frottement ne s'exerce désormais et sa vitesse angulaire  $\omega$  demeure constante.

**A** Calculez la vitesse  $v(t)$  et la vitesse angulaire  $\omega(t)$  de la roue, en fonction du temps, pendant la période d'accélération. Déduisez-en une valeur pour le temps  $T$  défini dans l'énoncé.

**B** Calculez le rapport  $K/K_0$  et exprimez-le en fonction de  $\alpha = R^2/k^2$  seulement.



**Problème 8.14**

Une porte de largeur  $L$  est ouverte brusquement et donne contre un butoir placé à une distance  $\ell < L$  des pentures. Montrez que lorsque

$$\ell = \frac{2}{3}L$$

les vis tenant les pentures en place ne subissent aucun impact lors du choc de la porte sur le butoir. Indice : Le butoir doit transférer à la porte une certaine quantité de mouvement et un certain moment cinétique afin d'immobiliser cette dernière. La distance demandée est celle pour laquelle la force qu'exerce la porte sur les vis s'annule. On doit supposer que la masse de la porte est uniformément répartie.

(auteur : M. Pioro-Ladrière)

**Problème 8.15**

Un tuyau cylindrique de rayon  $a$  est placé à l'intérieur d'un autre tuyau cylindrique de rayon  $R > a$  et, sous l'influence de la gravité, oscille autour de sa position d'équilibre avec une fréquence angulaire  $\omega$ .

**A** Montrez que la fréquence  $\omega$  des petites oscillations est donnée par

$$\omega = \sqrt{g(R-a)/[R^2 + (R-a)^2]}$$

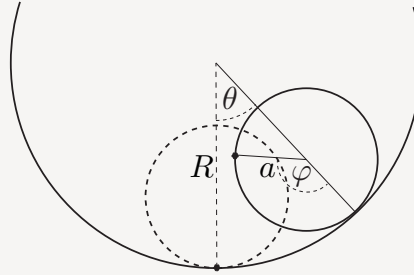
**B** Montrez que si le petit tuyau est remplacé par un cylindre plein de rayon  $a$ , cette fréquence devient

$$\omega = \sqrt{g(R-a)/[\frac{1}{2}R^2 + (R-a)^2]}$$

et que si le petit tuyau est remplacé par une sphère pleine de rayon  $a$ , elle devient

$$\omega = \sqrt{g(R-a)/[\frac{2}{5}R^2 + (R-a)^2]}$$

Indices : (1) Il faut écrire une expression complète pour l'énergie du petit tuyau, incluant les énergies potentielle, cinétique de rotation et cinétique de translation. (2) Le petit tuyau roule sans glisser, ce qui permet de relier  $\theta$  à  $\varphi$ . (3) Il faut exprimer l'énergie en fonction de  $\theta$  et de  $\dot{\theta}$  seulement et faire l'approximation que  $\theta$  est petit. (4) L'énergie est conservée ( $\dot{E} = 0$ ) ce qui nous permet d'obtenir une équation différentielle pour  $\theta$  identique à celle du pendule aux petites oscillations et d'identifier la fréquence  $\omega$ .



### Problème 8.16

Considérez un yo-yo idéal (avec un rayon extérieur  $b$ , un rayon intérieur  $a$  et le moment d'inertie d'un disque) qui se déroule en tombant sous l'influence de la gravité (le point de suspension de la corde reste fixe). Le yo-yo, après être parvenu à son point le plus bas (la longueur de la corde est  $\ell$ ), remonte ensuite jusqu'à son point de départ. Obtenez une expression pour la vitesse  $v$  du yo-yo en fonction de sa coordonnée verticale  $z$  (on suppose que  $z = \ell$  au départ et  $z = 0$  à son point le plus bas). Indice : utilisez la loi de conservation de l'énergie.

### Problème 8.17

Un objet en forme d'haltère est constitué de deux masses  $m$  reliées par une tige de masse négligeable. La distance (centre à centre) entre les deux masses est  $2a$ . Cet objet se déplace à une vitesse  $v$  vers la droite sans aucun mouvement de rotation sur lui-même. Il entre en collision avec une masse  $m$  au repos située à l'origine (la masse inférieure de l'haltère est à  $y = 0$ ). Après la collision, les deux objets se dirigent vers la droite, le premier avec une vitesse  $v'$  et le second avec une vitesse  $u$ . De plus, le premier objet tourne sur lui-même avec une vitesse angulaire  $\omega$ . Dans ce processus de collision, l'énergie est conservée, mais une partie de l'énergie cinétique de translation se convertit en énergie cinétique de rotation. Vous pouvez considérer que les trois masses en présence sont ponctuelles.

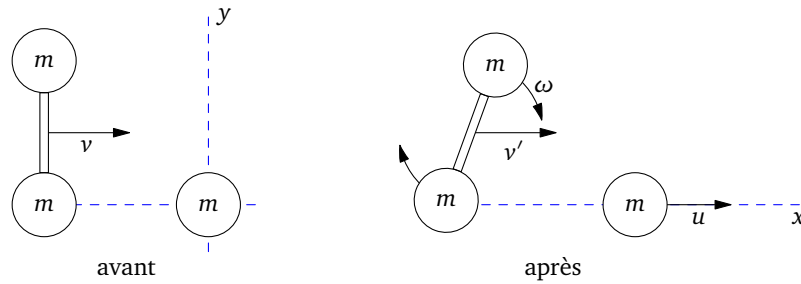
**A** Écrivez l'énergie totale  $E$ , la composante  $P_x$  de la quantité de mouvement totale et la composante  $J_z$  du moment cinétique total par rapport à l'origine, avant la collision, en fonction de  $m$ ,  $v$  et  $a$ .

**B** Écrivez  $E$ ,  $P$  et  $J$  après la collision en fonction de  $m$ ,  $a$ ,  $v'$ ,  $\omega$  et  $u$ .

**C** Exprimez  $u$ ,  $\omega$  et  $v'$  en fonction de  $v$  en supposant que l'énergie, la quantité de mouvement et le moment cinétique sont conservés.

### Problème 8.18

**A** Montrez que le moment d'inertie  $I$  d'une coquille sphérique très mince (une sphère creuse) de masse  $M$ , de rayon  $R$  et de densité uniforme, est  $I = \frac{2}{3}MR^2$ . Pour ce faire, vous pouvez soit utiliser une intégrale,

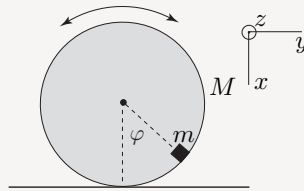


Prob. 8.17

en faisant la somme des moments d'inerties d'un ensemble d'anneaux; plus simplement, vous pouvez utiliser un principe différentiel, à partir du moment d'inertie d'une sphère pleine de rayon  $R$  et de masse  $M$ , qui est  $\frac{2}{5}MR^2$ . Utilisez la méthode de votre choix.

**B** Considérons maintenant un ballon rigide (donc une coquille sphérique) de masse  $M$  et de rayon  $R$ , sur lequel on colle une petite masse  $m$  fixée à la périphérie interne du ballon (on peut négliger les dimensions de cette petite masse par rapport à  $R$ ). Supposons que le ballon soit libre de rouler sur une surface plane, mais sans glisser. Supposons de plus que le ballon roule autour d'un axe qui sort de la page, perpendiculaire à la petite masse, comme illustré. Écrivez une expression pour l'énergie totale du ballon (cinétique + potentielle) en fonction de  $\varphi$ , de  $\dot{\varphi}$  et des paramètres du problème.

**C** En posant que l'énergie totale est constante, déduisez-en, par différentiation par rapport au temps, une équation différentielle pour l'angle  $\varphi$ , ainsi que la fréquence  $\Omega$  des petites oscillations par rapport à la position d'équilibre  $\varphi = 0$ .



### Problème 8.19

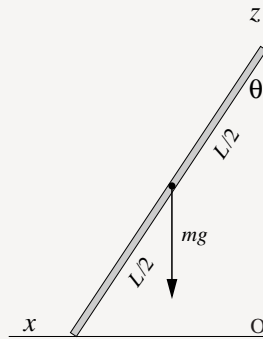
Une échelle de longueur  $L = 2\ell$  et de densité uniforme est appuyée sur un mur, à la verticale. Soudainement, elle se met à glisser contre le mur (et le sol). On suppose que le frottement ne joue aucun rôle appréciable ici. Les coordonnées  $x$  et  $z$  sont définies dans les directions indiquées, à partir de l'origine  $O$ .

**A** Obtenez une expression pour l'énergie totale de l'échelle (cinétique et potentielle) en fonction de l'angle  $\theta$  (et de sa dérivée  $\dot{\theta}$ ). N'oubliez pas que l'énergie cinétique est la somme de deux contributions, d'après le théorème de König. Note : le moment d'inertie d'une tige de longueur  $L$  par rapport à son centre de masse est  $I = \frac{1}{12}mL^2$ .

**B** Au lieu de  $\theta$ , exprimez l'énergie totale de l'échelle en fonction de  $x$  et de  $\dot{x}$  seulement.

**C** En partant du fait que l'énergie  $E$  est conservée, trouvez une expression pour la composante horizontale de l'accélération  $\ddot{x}$ . Cette composante peut-elle s'annuler? Dans l'affirmative, qu'est-ce qu'une telle

annulation signifierait pour l'échelle?

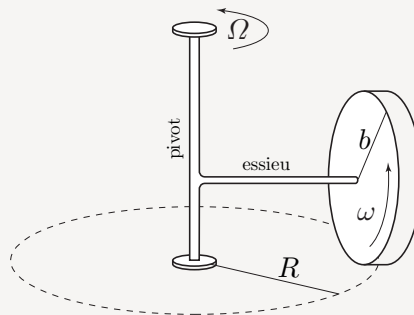


### Problème 8.20

Un disque de rayon  $b$ , d'épaisseur  $h$  et de masse  $m$  est lié à un essieu horizontal. Cet essieu est lui-même mobile, mais lié à un pivot vertical; il tourne à une fréquence  $\Omega$ , alors que le disque qui lui est attaché roule sans glisser sur le sol, en décrivant un cercle de rayon  $R$  (on peut supposer que  $h \ll R$ , voir figure). Le tout est à la base d'une ancienne technologie : la meule du moulin à farine. L'idée ici est que le mouvement de rotation de la meule autour de l'axe vertical cause un changement dans son moment cinétique et que le couple nécessaire à ce changement est fourni par la force de contact avec le sol, qui est alors plus grande que le simple poids de la meule. Ceci peut augmenter l'efficacité de la meule à moudre le grain.

Donnez une expression pour la force normale  $F$  exercée par le sol sur la meule, en tenant compte du poids  $mg$  de la meule. Pour une meule de 1 m de rayon, quelle doit être la période de rotation du pivot pour que la force normale soit le double du poids de la meule?

Indice : Écrivez une expression vectorielle pour le moment cinétique  $\mathbf{J}$  de la meule en fonction du temps, en plaçant l'origine sur le pivot, là où l'essieu le rejoint. Déduisez-en le couple nécessaire et identifiez les forces qui sont à l'origine de ce couple. La contrainte de roulement permet de relier la vitesse angulaire  $\omega$  de rotation du disque sur lui-même à la fréquence de rotation  $\Omega$  du pivot.



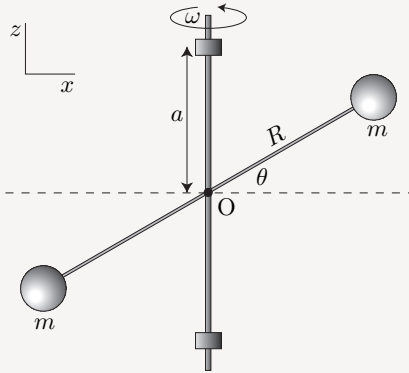
### Problème 8.21

Considérez le dispositif illustré : deux masses  $m$  sont reliées par une tige rigide de longueur  $2R$ . Cette tige

est fixée en son milieu à un axe de rotation vertical (selon  $z$ ) qui tourne à une vitesse angulaire constante  $\omega$ . La tige n'est pas perpendiculaire à l'axe de rotation, mais fait un angle  $\theta$  avec l'horizontale (la figure n'est pas une perspective 3D, mais une vue en coupe). L'axe de rotation est tenu en place par deux supports, situés à une distance  $a$  du point d'attache de la tige, en haut et en bas de celui-ci. On place l'origine au point d'attache de la tige; c'est à ce point qu'on évalue le moment cinétique et le couple.

**A** Donnez une expression pour le moment cinétique  $\mathbf{J}(t)$  du système tige-masses en fonction du temps. Vous pouvez négliger la masse de la tige et supposer que la tige est dans le plan  $xz$  à  $t = 0$ . Votre réponse doit être exprimée en fonction de  $R$ ,  $m$ ,  $\theta$  et  $\omega$ . Indiquez bien la direction du moment cinétique.

**B** Calculez le couple que les supports doivent exercer ensemble sur l'axe de rotation pour que le moment cinétique varie comme il le fait. Indiquez bien la direction du couple en fonction du temps. Quelle est la force que chacun des supports doit exercer sur l'axe pour fournir ce couple?

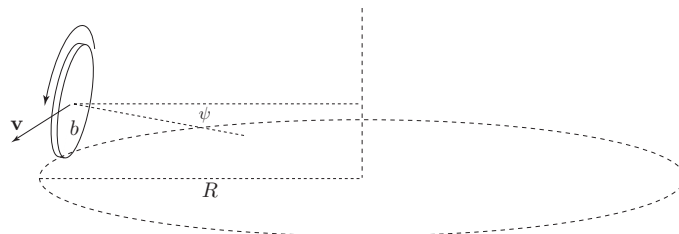


### Problème 8.22

Lorsqu'un disque (par exemple une pièce de monnaie) roule sans glisser sur un plan, l'inclinaison  $\psi$  de ce disque avec la verticale cause un couple qui pousse ce disque à changer de direction. Si la vitesse  $v$  du disque et l'angle  $\psi$  étaient constants, le disque décrirait une trajectoire circulaire sur le plan. Montrez que l'angle  $\psi$  est relié à  $v$ ,  $R$  et à l'accélération gravitationnelle  $g$  de la manière suivante :

$$\tan \psi = \frac{3v^2}{2gR}$$

Indice : La force de frottement statique entre le plan et le disque possède une composante dirigée vers le centre de la trajectoire et cette composante contribue au couple, tout comme la force normale. La composante horizontale du moment cinétique du disque décrit un cercle dans le temps. Vous devez supposer, pour simplifier le problème, que la vitesse angulaire du disque est toujours dans la direction de l'axe perpendiculaire au disque.



Prob. 8.22



**Problème 8.23**

Considérons un satellite artificiel, en orbite circulaire de rayon  $r$  autour de la Terre. Notons  $i$  l'inclinaison de son orbite par rapport à l'équateur (comme illustré). Si la Terre était parfaitement sphérique, elle n'exercerait aucun couple sur le satellite (la force serait parfaitement centrale) et le plan orbital du satellite resterait invariable. Cependant, la Terre est légèrement aplatie (exagéré sur la figure). On montre que le potentiel gravitationnel causé par la Terre est, en raison de cet aplatissement,

$$V(r, \theta) = -G \frac{M_{\oplus}}{r} \left( 1 - C \frac{R_{\oplus}^2}{r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right)$$

où  $C \approx 5,4 \times 10^{-4}$  est une constante numérique,  $R_{\oplus}$  est le rayon équatorial moyen de la Terre,  $\theta$  est la coordonnée sphérique habituelle, mesurée à partir du pôle, et  $r$  est la distance au centre de la Terre. Cet aplatissement produit un couple s'exerçant sur le satellite et cause une lente précession du plan orbital. Le but de cet exercice est de calculer la fréquence  $\Omega$  de cette précession. Aux fins de cet exercice, on peut remplacer le satellite par un anneau rigide de rayon  $r$ , tournant sur lui-même dans le même temps que met le satellite à effectuer une orbite complète. En effet, la précession du plan étant un phénomène lent en comparaison de la rotation du satellite autour de la Terre, on peut «distribuer» la masse du satellite le long de son orbite pour calculer  $\Omega$ , sans faire d'erreur considérable.

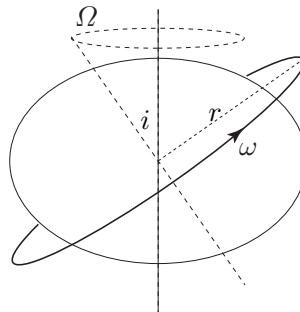
**A** Expliquez qualitativement, à l'aide d'un schéma, comment cet aplatissement peut causer un couple sur le satellite et dans quel sens la précession du plan orbital a lieu, étant donné le sens de rotation illustré.

**B** Calculez l'énergie potentielle gravitationnelle de l'anneau (qui remplace le satellite) en fonction de l'inclinaison  $i$ . Vous pouvez utiliser le fait que la coordonnée  $z$  du satellite en fonction du temps est  $z(t) = r \sin i \sin(\omega t)$ , où l'origine est au centre de la Terre et où l'axe des  $z$  coïncide avec l'axe polaire terrestre.  $\omega$  est la fréquence de révolution du satellite autour de la Terre. Indice : calculez la moyenne de l'énergie potentielle du satellite sur son orbite.

**C** À l'aide de l'énergie potentielle trouvée en (b) et de la relation entre le couple et l'énergie potentielle, montrez que la fréquence de précession du plan orbital du satellite est

$$\Omega = 3C\omega \frac{R_{\oplus}^2}{r^2} \cos i$$

**D** Si l'inclinaison est de  $45^\circ$  et l'altitude du satellite environ 100km, combien de révolutions sont-elles nécessaires pour que le plan orbital ait effectué une précession complète et revienne à son état original?



Prob. 8.23



## CHAPITRE 9

# RÉFÉRENTIELS ACCÉLÉRÉS

Un référentiel inertiel est une idéalisation. En pratique, les référentiels que nous utilisons, comme le référentiel terrestre, ne sont pas exactement inertiels. Il est donc important de comprendre comment incorporer dans l'étude du mouvement les effets qui proviennent d'un référentiel accéléré.

### A Forces d'inertie

Un référentiel est dit *accéléré* s'il n'est pas inertiel, c'est-à-dire si son origine ou ses axes sont en mouvement accéléré par rapport à un référentiel inertiel. Considérons d'abord le cas d'un référentiel accéléré  $S_a$  dont les axes ont la même orientation que les axes d'un référentiel inertiel  $S_i$ . L'origine du référentiel  $S_a$  par rapport à  $S_i$  est le vecteur  $\mathbf{r}_0(t)$  et peut dépendre du temps d'une manière quelconque. Un objet en mouvement est caractérisé par une position  $\mathbf{r}_i$  dans le référentiel  $S_i$  et une position  $\mathbf{r}_a$  dans le référentiel  $S_a$ . Bien sûr,

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0(t) \quad (9.1)$$

En prenant la dérivée par rapport au temps de cette relation, on trouve

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0(t), \quad (9.2)$$

où  $\mathbf{v}_0$  est la vitesse instantanée du référentiel  $S_a$  par rapport à  $S_i$ . Si  $\mathbf{v}_0$  est constante, c'est que  $S_a$  n'est pas accéléré, mais constitue un autre référentiel inertiel. Si on dérive une fois de plus par rapport au temps, on trouve

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0(t), \quad (9.3)$$

où  $\mathbf{a}_0$  est l'accélération de l'origine de  $S_a$  par rapport à  $S_i$ . Par exemple, si un objet est au repos dans  $S_a$  ( $\mathbf{v}_a = 0$ ,  $\mathbf{a}_a = 0$ ), alors son accélération par rapport à  $S_i$  est  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_0$ . Si, au contraire, il est au repos par rapport à  $S_i$  ( $\mathbf{v}_i = 0$ ,  $\mathbf{a}_i = 0$ ), alors son accélération telle que mesurée dans  $S_a$  est  $\mathbf{a}_a = -\mathbf{a}_0$ .

La première loi de Newton n'est valable que dans un référentiel inertiel. La deuxième aussi d'ailleurs, car les lois de forces ne dépendent que des positions et vitesses relatives des particules, ce qui fait que la force agissant sur une particule et causée par un autre objet est la même, quel que soit le référentiel utilisé. On doit donc écrire

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_i = m(\mathbf{a}_a + \mathbf{a}_0) \quad (9.4)$$

Cependant, dans le but de conserver à la loi de Newton sa validité apparente dans le référentiel  $S_a$ , on définit une *force d'inertie* (ou *force fictive*, ou *pseudo-force*)

$$\mathbf{F}_0 = -m\mathbf{a}_0 \quad (9.5)$$

et on écrit la deuxième loi sous la forme

$$\mathbf{F}_{\text{réel}} + \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{\text{app.}} = m\mathbf{a}_a \quad (9.6)$$

Nous avons affublé la force  $\mathbf{F}$  de l'indice 'réel' pour insister sur le fait qu'il s'agit de la force associée aux interactions avec d'autres objets, celle qui apparaît dans un référentiel inertiel. La force apparente  $\mathbf{F}_{\text{app.}}$  est la force réelle, plus la force d'inertie, telle que ressentie dans un référentiel accéléré. La force d'inertie s'ajoute donc aux autres forces dans la loi de Newton. Notons cependant que cette force n'est pas associée à la proximité des autres objets (elle ne résulte pas d'une interaction) mais est simplement un artifice du référentiel accéléré choisi.

Dans le cas de deux référentiels ayant les mêmes axes, la force d'inertie est la même partout, car  $\mathbf{a}_0$  ne dépend pas de la position, mais uniquement du temps (à la rigueur). Des exemples de tels référentiels accélérés sont

- Un ascenseur en chute libre, ou en début de montée ou de descente.
- Un avion en trajectoire parabolique.
- Une fusée en ascension.
- Un rame de métro en accélération linéaire.

Dans d'autres cas, notamment dans un référentiel tournant, l'accélération  $\mathbf{a}_0$  peut dépendre de la position et de la vitesse d'un objet.

### 9.A.1 Principe d'équivalence

Considérons une particule sous l'influence d'un champ gravitationnel  $\mathbf{g}$ , observée à partir d'un référentiel accéléré. La force apparente s'exerçant sur cette particule est

$$\mathbf{F}_{\text{app.}} = m\mathbf{a}_a = m(\mathbf{g} - \mathbf{a}_0) \quad (9.7)$$

Ceci signifie que l'accélération du référentiel produit le même effet qu'un champ gravitationnel. Un observateur qui ne ressent que  $\mathbf{F}_{\text{app.}}$  ne pourrait affirmer si cette force est causée par un vrai champ gravitationnel ou par le fait d'être dans un référentiel accéléré, à moins de savoir a priori qu'il y a une planète à proximité! Cette impossibilité de distinguer l'effet d'un champ de gravitation d'une force d'inertie a été élevée au rang de principe par A. Einstein. C'est le *principe d'équivalence* :

On ne peut distinguer localement une force d'inertie d'une force gravitationnelle.

L'origine physique de ce principe est que la masse gravitationnelle – celle qui figure dans la formule de gravitation de Newton  $GMm/r^2$  – est la même que la masse inertielle, qui figure dans  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Plus précisément, la constante de Cavendish  $G$  étant universelle, le rapport de la masse inertielle à la masse gravitationnelle est le même pour toutes les particules élémentaires.

Précisons le sens du principe d'équivalence : un observateur disposant d'une batterie d'instruments scientifiques dans un espace restreint, isolé du monde extérieur, ne pourrait, par une expérience, déterminer s'il est dans un champ gravitationnel ou dans un référentiel accéléré. Le mot 'localement' dans le principe d'équivalence est important, car il existe une différence entre un vrai champ de gravitation et une force d'inertie : le champ de gravitation a besoin de sources pour exister. L'observateur pourrait faire la différence entre les deux en mesurant comment la force apparente varie finement d'un point à un autre et c'est pour cela qu'on le restreint à un espace petit. Par exemple, le champ  $\mathbf{g}$  autour de la Terre pointe vers le centre de la Terre. Aucun référentiel accéléré ne peut produire cet effet partout. La force d'inertie ne peut annuler une force gravitationnelle que dans un voisinage assez restreint à l'échelle de la planète, par exemple à l'intérieur d'une capsule spatiale en orbite autour de la Terre. Le principe d'équivalence est à la base de la *relativité générale*, la théorie moderne de la gravitation, formulée par Einstein en 1915.

### Apesanteur

On se trouve en état d'*apesanteur* lorsque l'accélération du référentiel compense exactement le champ gravitationnel ( $\mathbf{a}_0 = \mathbf{g}$ ). Cette définition peut paraître arbitraire, mais le fait est qu'une personne en chute libre ne ressent pas les effets de la gravité, par exemple les astronautes en orbite autour de la Terre. Par contre, une personne sur le «plancher des vaches» ressent une force sur ses pieds (ou sur tout autre partie de son corps en contact avec le sol) qui compense exactement la force gravitationnelle. La sensation de pesanteur est étroitement liée à cette force normale (on la ressent moins lorsqu'on nage sous l'eau).<sup>1</sup> En somme, la sensation de pesanteur est causée par à peu près toutes les forces *sauf* la force de gravité, affirmation qui peut sembler paradoxale, mais qui demeure néanmoins exacte!

L'entraînement des astronautes en apesanteur se fait souvent à l'intérieur d'avions qui, pendant une fraction de minute, suivent une trajectoire parabolique comme celle d'un projectile. Autrement dit, le long de cette trajectoire parabolique, les moteurs de l'avion ne font que compenser exactement la force de résistance de l'air agissant sur l'avion et le tout suit une trajectoire identique à celle que suivrait l'avion en l'absence d'atmosphère, tous moteurs coupés. L'avion constitue alors un référentiel en «chute libre», dont l'accélération est  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{g}$  et ses occupants sont en état d'apesanteur.

## B Référentiel tournant

Considérons maintenant un référentiel tournant  $S_r$ , dont l'origine coïncide en tout temps avec celle d'un référentiel inertiel  $S_i$  mais dont les axes sont en rotation uniforme par rapport à ceux de  $S_i$ . Désignons par  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  les vecteurs de base du référentiel  $S_i$  et par  $\{\mathbf{e}_x', \mathbf{e}_y', \mathbf{e}_z'\}$  ceux du référentiel tournant  $S_r$ . Le référentiel tournant est caractérisé par un vecteur de vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$ , constant en grandeur et en direction. Selon la relation (8.28), la dérivée temporelle des vecteurs de base  $\{\mathbf{e}_x', \mathbf{e}_y', \mathbf{e}_z'\}$  est

$$\frac{d\mathbf{e}_x'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_x' \quad \frac{d\mathbf{e}_y'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_y' \quad \frac{d\mathbf{e}_z'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_z' \quad (9.8)$$

Un vecteur quelconque  $\mathbf{B}$  peut être décrit dans les deux repères comme

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z \\ &= B'_x \mathbf{e}_x' + B'_y \mathbf{e}_y' + B'_z \mathbf{e}_z' \end{aligned} \quad (9.9)$$

Sa dérivée par rapport au temps est

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_i &= \dot{B}_x \mathbf{e}_x + \dot{B}_y \mathbf{e}_y + \dot{B}_z \mathbf{e}_z \\ &= \dot{B}'_x \mathbf{e}_x' + \dot{B}'_y \mathbf{e}_y' + \dot{B}'_z \mathbf{e}_z' + B'_x \dot{\mathbf{e}}_x' + B'_y \dot{\mathbf{e}}_y' + B'_z \dot{\mathbf{e}}_z' \\ &= \left( \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (B'_x \mathbf{e}_x' + B'_y \mathbf{e}_y' + B'_z \mathbf{e}_z') \\ &= \left( \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{B} \end{aligned} \quad (9.10)$$

1. D'autres facteurs physiologiques sont aussi impliqués, en particulier les mouvements des particules en suspension dans le colimaçon de l'oreille interne, responsable de la sensation d'équilibre.

Le premier terme n'est autre que la dérivée temporelle de  $\mathbf{B}$  telle que mesurée dans le référentiel tournant, alors que le membre de gauche est cette même dérivée, mesurée dans le référentiel fixe. On écrit donc

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_i = \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{B} \quad (9.11)$$

En particulier, si  $\mathbf{B} = \mathbf{r}$  (la position d'un objet), cette formule nous permet de comparer les vitesses du même objet dans les deux référentiels :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \quad (9.12)$$

Le but de cet exercice est de comparer les accélérations d'un objet mesurées dans les deux référentiels. Pour ce faire, il faut appliquer la relation (9.11) deux fois de suite :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\right)_i \\ &= \left(\frac{d}{dt} [\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}]\right)_i \\ &= \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_i + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_i \quad (\boldsymbol{\omega} \text{ est constant}) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (9.13)$$

Ce qui donne finalement

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \quad (9.14)$$

Selon notre définition  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_0$  de l'accélération du référentiel, on trouve

$$\mathbf{a}_0 = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \quad (9.15)$$

et la force d'inertie  $\mathbf{F}_0$  ressentie dans le référentiel tournant est alors

$$\mathbf{F}_0 = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r - m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \quad (9.16)$$

### 9.B.1 Force centrifuge

Le deuxième terme de (9.16) est appelé *force centrifuge* :

$$\mathbf{F}_{\text{cent.}} = -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \quad (9.17)$$

Cette force d'inertie ne dépend que de la distance entre l'objet et l'axe de rotation. En effet, décomposons  $\mathbf{r}$  en composantes parallèle et perpendiculaire à  $\boldsymbol{\omega}$  :  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ . Comme  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\perp} = 0$  et  $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{\parallel} = 0$ , on trouve, d'après l'expression (11.5) du double produit vectoriel,

$$\begin{aligned} -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) &= -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{\perp}) \\ &= m \{ \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_{\perp} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\perp}) \boldsymbol{\omega} \} \\ &= m\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_{\perp} \end{aligned} \quad (9.18)$$

La grandeur  $r_{\perp}$  du vecteur  $\mathbf{r}_{\perp}$  est la distance entre le point  $\mathbf{r}$  et l'axe de rotation du référentiel.

Si l'objet est stationnaire dans  $S_r$ , c'est-à-dire si  $\mathbf{v}_r = 0$ , alors  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{\perp}$  ou, en grandeur,

$$v_i = \omega r_{\perp} \quad (9.19)$$

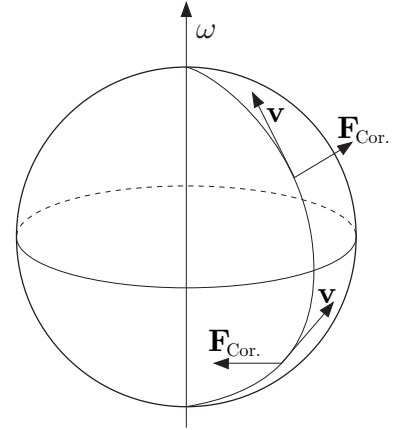
de sorte que la grandeur de la force centrifuge peut s'exprimer aussi comme

$$F_{\text{cent.}} = \frac{m v_l^2}{r_{\perp}} \quad (\mathbf{v}_r = 0) \quad (9.20)$$

Il est bien important de distinguer les épithètes *centrifuge* et *centripète*. Techniquement, une force est qualifiée de *centripète* si elle est dirigée vers le centre d'un cercle et une telle force est généralement réelle. Par contre, la force *centrifuge* est une force d'inertie qui n'a de sens que dans un référentiel tournant et est dirigée vers l'extérieur, par rapport à l'axe de rotation du référentiel. Un exemple de la vie courante nous aidera à mieux distinguer les deux. Considérons une automobile en virage, décrivant un arc de cercle de rayon  $R$  à une vitesse  $v$ . Du point de vue d'un référentiel inertiel, un passager de cette automobile est donc en trajectoire circulaire et son accélération  $\mathbf{a}$  est dirigée vers le centre du cercle et sa grandeur est  $a = v^2/R$ . La force qui maintient le passager sur cette trajectoire est principalement exercée par la portière droite et la banquette de l'automobile; cette force est réelle et peut être qualifiée de centripète. Plaçons-nous maintenant dans le référentiel (accélééré) de l'automobile. Le passager est stationnaire dans ce référentiel et la force totale (réelle + fictive) agissant sur lui est donc nulle. La force réelle est la force centripète décrite plus haut. La force d'inertie est la force centrifuge, de grandeur  $v^2/R$  et dirigée vers l'extérieur, exactement opposée à la force centripète. Remarquons que le passager affirmera tout naturellement ressentir la force centrifuge, pour la même raison qu'il affirme ressentir la force de gravité : localement, les deux forces ont le même type d'effet, d'après le principe d'équivalence. Cependant, comme dans le cas de la sensation de pesanteur mentionnée plus haut, c'est plutôt la force exercée par la portière et la banquette qui est ressentie par le passager (au sens physiologique du terme) et non la force centrifuge. La sensation de poussée est un phénomène bien réel, alors que la force centrifuge est un concept inventé de toute pièce afin d'appliquer la deuxième loi de Newton dans des circonstances illicites (un référentiel non inertiel).

FIGURE 9.1

La force de Coriolis s'exerçant sur un objet qui se dirige vers le nord-est dirigée vers l'est dans l'hémisphère nord et vers l'ouest dans l'hémisphère sud.



### 9.B.2 Force de Coriolis

Le premier terme de (9.16) est appelé *force de Coriolis* :

$$\mathbf{F}_{\text{Cor.}} = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r \quad (9.21)$$

et ne dépend que de la vitesse mesurée dans le référentiel tournant.

La Terre constitue un exemple particulièrement intéressant de référentiel tournant où la force de Coriolis se révèle entre autres dans les systèmes climatiques. À un endroit donné sur la Terre, la vitesse angulaire se décompose en composantes horizontale et verticale :  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_v + \boldsymbol{\omega}_h$ , où  $|\boldsymbol{\omega}_v| = \omega \sin \lambda$  ( $\lambda$  est la latitude). La force de Coriolis se décompose de manière similaire :

$$\mathbf{F}_{\text{Cor.}} = -2m\boldsymbol{\omega}_v \wedge \mathbf{v}_r - 2m\boldsymbol{\omega}_h \wedge \mathbf{v}_r \quad (9.22)$$

Si  $\mathbf{v}_r$  est parallèle à la surface de la Terre, le deuxième terme est forcément vertical et n'apporte qu'une faible contribution à la gravité apparente à cet endroit. Le premier terme est cependant parallèle à la surface et a un effet important sur le déplacement des masses d'air : voir à cet effet la section suivante.

Quant à la force centrifuge associée à la rotation de la Terre, on ne peut la distinguer localement de la force de gravité réelle exercée par la Terre, conformément au principe d'équivalence. Le calcul de la contribution de la force centrifuge à la gravité ressentie à la surface d'une planète sphérique est l'objet de l'exercice 9.11. On désigne par *champ de pesanteur* la somme du champ gravitationnel réel  $\mathbf{g}$  et de  $-\mathbf{a}_0$  (la force centrifuge divisée par la masse) :

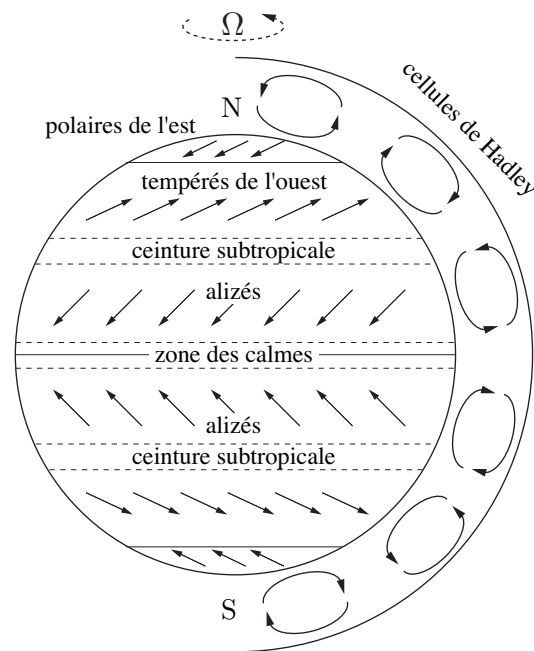
$$\mathbf{g}_{\text{pes.}} = \mathbf{g} - \mathbf{a}_0 \quad (9.23)$$

C'est dans la direction de  $\mathbf{g}_{\text{pes.}}$  que pointe un fil à plomb. La contribution de la force centrifuge au champ de pesanteur est la plus grande à l'équateur, mais ne vaut qu'environ 0,3% du champ gravitationnel.

### 9.B.3 Force de Coriolis et systèmes climatiques

FIGURE 9.2

Explication de la direction des vents dominants par la force de Coriolis.

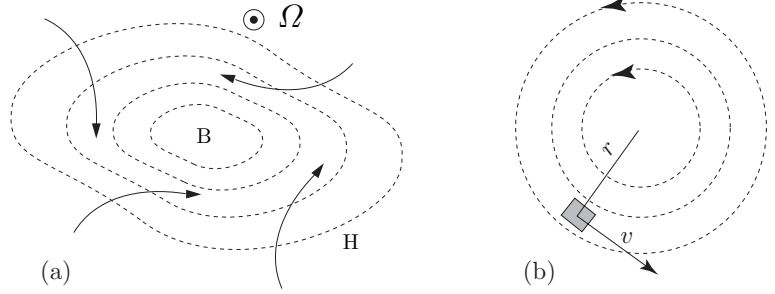


C'est en météorologie qu'on trouve les applications les plus importantes de la force de Coriolis. Expliquons premièrement comment cet effet explique la direction des vents dominants. La figure 9.2 illustre une coupe de l'atmosphère terrestre, ainsi que la direction dominante des masses d'air. La différence de température entre la surface de la Terre et la haute atmosphère cause un mouvement de convection de l'air qui s'organise en six cellules de convection appelées *cellules de Hadley*. Les masses d'air de la basse atmosphère ont donc un mouvement naturel dirigé vers le nord, à nos latitudes ( $45^\circ$ ). Cependant, la force de Coriolis dévie ce mouvement vers l'est, produisant un vent d'ouest (c'est-à-dire en provenance de l'ouest) : ce sont les vents dominants tempérés de l'ouest. Sous les tropiques, les vents dominants (les alizés) sont de l'est, comme près des pôles. Remarquez que la direction des vents dominants est la même dans les deux hémisphères, car les directions des courants de convection dans les deux hémisphères sont opposées. Ainsi, au XVIII<sup>e</sup> siècle, les navires effectuant le commerce triangulaire entre la France, les Antilles et le Canada pouvaient profiter des alizés pour traverser l'Atlantique vers les Antilles et des vents tempérés de l'ouest pour passer de la Nouvelle-France vers la Métropole.

La force de Coriolis explique aussi la formation des cyclones et des anticyclones. Lorsque l'air afflue vers un centre de basse pression, sa vitesse initiale, dirigée vers le centre, est modifiée par la force de Coriolis de



**FIGURE 9.3**  
Formation des cyclones expliquée par  
la force de Coriolis.



sorte que le flot de l'air forme un tourbillon antihoraire (dans l'hémisphère nord). Voir la figure 9.3a. Dans l'hémisphère sud, le tourbillon est dans l'autre sens. Si la zone de haute pression est au centre, la direction des tourbillons est inversée.

Voyons comment on peut relier la vitesse  $v$  de l'air à la distance  $r$  le séparant de l'oeil du cyclone. Considérons à cet effet la figure 9.3b, plus précisément un élément d'air de forme cubique, ayant une épaisseur  $\Delta r$  dans la direction radiale, et une surface  $A$  dans la direction perpendiculaire. La pression  $P(r)$  est une fonction de la distance à l'oeil du cyclone. La force exercée sur l'élément d'air par le gradient de pression est la différence entre la force exercée sur la face interne de l'élément, égale à  $P(r)A$ , et la force exercée sur la face externe, égale à  $P(r + \Delta r)A$ . La force nette sur l'élément d'air causée par le gradient de pression est donc

$$P(r)A - P(r + \Delta r)A = -\frac{dP}{dr}A\Delta r = -\frac{dP}{dr}V \quad (9.24)$$

où  $V = A\Delta r$  est le volume de l'élément d'air. Il s'agit ici d'une force dans la direction radiale, positive si dirigée vers l'extérieur et négative dans le cas contraire. Dans le cas d'un cyclone, la zone de basse pression est au centre et  $dP/dr > 0$ , de sorte que la force est dirigée vers le centre. Dans le cas d'un anticyclone,  $dP/dr < 0$  est la force est dirigée vers l'extérieur. À cette force on doit ajouter la force de Coriolis, qui vaut  $2m\Omega v \sin \lambda$  ( $\lambda$  est la latitude), dirigée vers l'extérieur dans le cas d'un cyclone, et vers l'intérieur dans le cas d'un anticyclone. Afin de représenter ces deux situations en même temps, définissons un symbole  $\eta$  qui vaut  $+1$  dans le cas d'un cyclone et  $-1$  dans le cas d'un anticyclone. La deuxième loi de Newton s'écrit donc

$$2\eta\rho V\Omega v \sin \lambda - V\frac{dP}{dr} = -\rho V\frac{v^2}{r} \quad (9.25)$$

où  $\rho$  est la densité de l'air,  $\rho V$  est la masse de l'élément d'air considéré et où le membre de droite de l'équation est la masse fois l'accélération centripète. Le volume  $V$  se simplifie de cette équation :

$$2\eta\Omega v \sin \lambda - \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = -\frac{v^2}{r} \quad (9.26)$$

Il s'agit ici d'une équation quadratique pour la vitesse  $v$ , qu'on peut exprimer en fonction du rayon  $r$  et du gradient de pression  $dP/dr$  :

$$v = -\eta\Omega r \sin \lambda \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{dP/dr}{\Omega^2 r \rho \sin^2 \lambda}} \right\} \quad (9.27)$$

On vérifie que  $v$  est positif dans les deux cas  $\eta = 1$  et  $\eta = -1$  (le signe de la racine carrée a été choisi en conséquence).

Cette formule se simplifie dans le cas où le gradient de pression est petit devant  $\Omega^2 r \rho \sin^2 \lambda$ . Dans ce cas, le développement du binôme peut être appliqué à la racine carrée et on trouve

$$\sqrt{1 + \frac{dP/dr}{\Omega^2 r \rho \sin^2 \lambda}} \approx 1 + \frac{dP/dr}{2\Omega^2 r \rho \sin^2 \lambda} \quad (9.28)$$

et dans ce cas

$$v = \frac{\left| \frac{dP}{dr} \right|}{2\Omega\rho \sin \lambda} \quad (9.29)$$

Par exemple, un gradient de pression de 3 millibars par 100 km, à une latitude de  $45^\circ$ , produit une vitesse de 22 m/s.

Remarquons que si  $dP/dr > 0$  (donc  $\eta = 1$ ), une solution existe toujours, même pour de très forts gradients de pression. Par contre, si  $dP/dr < 0$  (donc  $\eta = -1$ ), le gradient ne peut pas excéder une certaine valeur, sinon la racine carrée de la solution (9.27) devient imaginaire : pour que  $v$  soit réel, il faut que

$$\left| \frac{dP}{dr} \right| < \Omega^2 r \rho \sin^2 \lambda \quad (9.30)$$

Ceci signifie qu'un anticyclone est limité dans son intensité : la force de Coriolis dans ce cas est dirigée vers le centre, contre le gradient de pression, et sert à stabiliser la structure. Mais elle ne peut pas l'emporter sur la gradient de pression si celui-ci est trop grand ou si le rayon  $r$  est trop petit. Par contre, les cyclones peuvent être beaucoup plus intenses.

### 9.B.4 Marées

Les *marées* sont causées par l'inhomogénéité du champ gravitationnel lunaire ou solaire sur l'étendue de la Terre. Comme on doit étudier ce phénomène dans le référentiel terrestre et que l'accélération de ce dernier y joue un rôle, nous étudions ce phénomène dans cette section.

Pour simplifier, ne tenons compte que de l'effet du Soleil pour commencer. Soit  $\mathbf{n}$  le vecteur unité dirigé du centre du Soleil vers le centre de la Terre et  $\mathbf{e}_r$  le vecteur unité dirigé du centre du Soleil vers un point d'observation sur la Terre. Si  $r_s$  est la distance Terre-Soleil (centre à centre), alors le champ gravitationnel solaire au centre de la Terre est

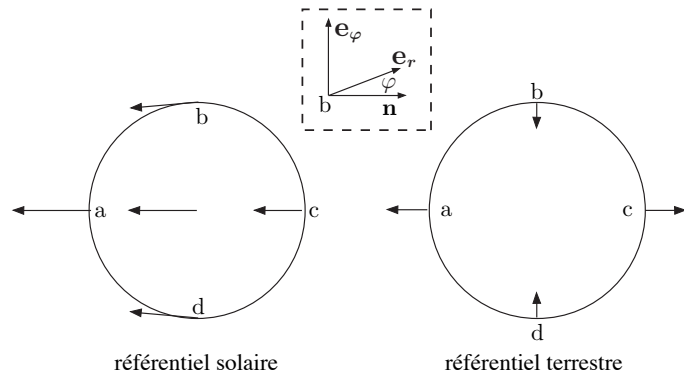
$$\mathbf{g}_0 = -GM_\odot \frac{\mathbf{n}}{r_s^2} \quad (9.31)$$

Le champ gravitationnel solaire en un point quelconque de la Terre, situé à une distance  $r$  du Soleil, est

$$\mathbf{g} = -GM_\odot \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \quad (9.32)$$

**FIGURE 9.4**

Le champ de pesanteur du Soleil sur la Terre, dans le référentiel du système solaire (à gauche) et dans le référentiel terrestre (à droite).



Le référentiel terrestre (sans tenir compte, pour le moment, de la rotation de la Terre sur elle-même) est un référentiel accéléré dans lequel  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{g}_0$ . Le champ de pesanteur solaire  $\mathbf{g}_{\text{pes.}}$  est alors  $\mathbf{g} - \mathbf{g}_0$  :

$$\mathbf{g}_{\text{pes.}} = -GM_\odot \left( \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} - \frac{\mathbf{n}}{r_s^2} \right) \quad (9.33)$$

Référons-nous à la figure 9.4. Au point (a),  $\mathbf{e}_r = \mathbf{n}$  et alors

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\text{pes.}}^{(a)} &= G M_{\odot} \left( \frac{1}{r_s^2} - \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{n} \\ &= G M_{\odot} \left( \frac{1}{r_s^2} - \frac{1}{(r_s - R_{\oplus})^2} \right) \mathbf{n} \\ &= \frac{G M_{\odot}}{r_s^2} \left( 1 - \frac{1}{(1 - R_{\oplus}/r_s)^2} \right) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (9.34)$$

Puisque  $R_{\oplus}/r_s$  est petit, on peut utiliser un développement de Taylor au premier ordre :

$$\frac{1}{(1 - R_{\oplus}/r_s)^2} \approx 1 + \frac{2R_{\oplus}}{r_s} \quad (9.35)$$

on obtient donc, à cet ordre de précision,

$$\mathbf{g}_{\text{pes.}}^{(a)} = -\frac{2G M_{\odot} R_{\oplus}}{r_s^3} \mathbf{n} = \mathbf{g}_0 \frac{2R_{\oplus}}{r_s} \quad (9.36)$$

Au point (c),  $r = r_s + R_{\oplus}$  et, comme en (a),  $\mathbf{e}_r = \mathbf{n}$ . Il s'ensuit que

$$\mathbf{g}_{\text{pes.}}^{(c)} = \frac{2G M_{\odot} R_{\oplus}}{r_s^3} \mathbf{n} = -\mathbf{g}_0 \frac{2R_{\oplus}}{r_s} \quad (9.37)$$

Au point (b),  $r$  et  $r_s$  sont identiques au premier ordre en  $R_{\oplus}/r_s$ . Cependant, les vecteurs  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{n}$  ne sont pas parallèles. On a plutôt

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{e}_{\varphi} \sin \varphi \approx \mathbf{n} + \varphi \mathbf{e}_{\varphi} \quad \varphi \approx \frac{R_{\oplus}}{r_s} \quad (9.38)$$

Donc

$$\mathbf{g}_{\text{pes.}}^{(b)} = -|\mathbf{g}_0| \frac{R_{\oplus}}{r_s} \mathbf{e}_{\varphi} \quad \mathbf{g}_{\text{pes.}}^{(d)} = |\mathbf{g}_0| \frac{R_{\oplus}}{r_s} \mathbf{e}_{\varphi} \quad (9.39)$$

#### Remarques :

- ♦ En substituant les données relatives au Soleil, on trouve

$$g_0 = 5,98 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2 \quad \frac{2R_{\oplus}}{r_s} = 8,55 \times 10^{-5} \quad g_{\text{pes.}}^{(a)} = 5,11 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2 \quad (9.40)$$

Le même calcul pour la Lune donne

$$g_0 = 3,32 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2 \quad \frac{2R_{\oplus}}{r_{\ell}} = 3,32 \times 10^{-2} \quad g_{\text{pes.}}^{(a)} = 1,10 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2 \quad (9.41)$$

Donc, même si le champ gravitationnel de la Lune est beaucoup plus faible sur la Terre que celui du Soleil, la Lune étant plus rapprochée, la variation de ce champ est plus prononcée d'un côté à l'autre de la Terre et la force de marée de la Lune est environ deux fois plus grande que celle du Soleil.

- ♦ La force de marée produit en quelque sorte un 'bourrelet' des océans. La rotation de la Terre sur elle-même cause une variation du niveau de la mer à un endroit donné qui monte et descend *deux* fois par jour. Ce bourrelet des océans n'est pas orienté vers la Lune ou le Soleil, mais à peu près en quadrature (c'est-à-dire à angle droit) avec la Lune.
- ♦ Les marées sont un phénomène dynamique. C'est en raison de la rotation de la Terre et de la révolution de la Lune qu'elles existent, car autrement une si petite force ( $\sim 10^{-7} g$ ) n'aurait aucun effet visible : la forme de la Terre s'y serait lentement adaptée.
- ♦ Les marées sont plus intenses quand le Soleil et la Lune sont alignés. Cette conjonction de la Lune et du Soleil porte le nom de *syzygie* et donne lieu aux marées de 'vive-eau' ou 'grosses mers'. Lorsque ces deux astres sont en quadrature et travaillent l'un contre l'autre les marées sont de moindre amplitude (marées de 'morte-eau' ou 'petites mers'). D'autre part, les marées d'hiver sont plus importantes que les marées d'été, car le Soleil est plus proche de la Terre en hiver qu'en été (l'orbite terrestre étant elliptique).

### 9.B.5 Pendule de Foucault

Considérons maintenant un pendule harmonique de très faible amplitude, sur la Terre, et étudions l'effet de la force de Coriolis sur un tel pendule. On suppose bien sûr que l'oscillation du pendule est approximativement confinée à un plan, mais nous allons voir que ce plan est en rotation en raison de la rotation même de la Terre et qu'il s'agit d'une preuve directe de la rotation de la Terre sur elle-même.

Utilisons un système de coordonnées cylindriques où l'axe  $z$  est vertical. Si le pendule se trouve à une latitude  $\lambda$ , alors le vecteur de vitesse angulaire de la Terre est

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \Omega(\cos \lambda \mathbf{e}_x + \sin \lambda \mathbf{e}_z) \\ &= \Omega[(\mathbf{e}_\rho \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi) \cos \lambda + \sin \lambda \mathbf{e}_z]\end{aligned}\quad (9.42)$$

(on suppose que l'axe  $x$  est dirigé vers le nord). La position du pendule est

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z \quad (9.43)$$

et sa vitesse est

$$\mathbf{v} = v_\rho \mathbf{e}_\rho + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_z \mathbf{e}_z \quad (9.44)$$

La force de Coriolis est alors

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{Cor.}} &= -2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} \\ &= -2m\Omega(\cos \lambda \cos \varphi \mathbf{e}_\rho - \cos \lambda \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi + \sin \lambda \mathbf{e}_z) \wedge (v_\rho \mathbf{e}_\rho + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_z \mathbf{e}_z) \\ &= -2m\Omega(v_\varphi \cos \lambda \cos \varphi + v_\rho \cos \lambda \sin \varphi) \mathbf{e}_z + 2m\Omega(v_z \cos \lambda \sin \varphi + v_\varphi \sin \lambda) \mathbf{e}_\rho \\ &\quad - 2m\Omega(v_\rho \sin \lambda - v_z \cos \lambda \cos \varphi) \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\quad (9.45)$$

La force totale sur le pendule est la somme de la force de tension du câble, de la force gravitationnelle et de la force de Coriolis :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{T} - mg\mathbf{e}_z + \mathbf{F}_{\text{Cor.}} \quad (9.46)$$

Nous ne résoudrons pas cette équation complètement, mais seulement sa composante en  $\varphi$ . Comme la tension et la force gravitationnelle n'ont pas de composante en  $\varphi$ , tout se simplifie :

$$\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} = -2\Omega(v_\rho \sin \lambda - v_z \cos \lambda \cos \varphi) \quad (9.47)$$

Puisque, par hypothèse, l'amplitude de l'oscillation du pendule est petite, on peut négliger  $v_z$  en tout temps. Comme  $v_\rho = \dot{\rho}$ , on écrit donc

$$\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} = -2\Omega \sin \lambda \dot{\rho} \quad (9.48)$$

La solution de cette équation peut être compliquée en général, car elle celle-ci est couplée aux autres composantes de l'équation du mouvement par la présence de  $\rho$  et  $\dot{\rho}$ . Cependant, il existe une solution particulière simple, obtenue en supposant que  $\dot{\varphi}$  est une constante, ce qui signifie que le plan d'oscillation du pendule tourne à une vitesse constante. Dans ce cas,  $\ddot{\varphi} = 0$  et le facteur  $\dot{\rho}$  se simplifie. Il reste

$$\dot{\varphi} = -\Omega \sin \lambda \quad (9.49)$$

En intégrant sur une période  $T_{\text{pr.}}$  de précession, on trouve

$$T_{\text{pr.}} = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} = \frac{T_0}{\sin \lambda} \quad (9.50)$$

où  $T_0 = 24\text{h}$  est la période de rotation de la Terre. Remarques :

- Le signe de la relation (9.49) nous renseigne sur la direction de la précession. Dans l'hémisphère nord ( $\lambda > 0$ ),  $\dot{\varphi}$  est négatif et donc le plan du pendule précède dans le sens horaire, alors que c'est le contraire dans l'hémisphère sud.
- À l'équateur ( $\lambda = 0$ ) il n'y a aucune précession. Au pôle nord ( $\lambda = \pi/2$ ), la période de précession est  $2\pi/\Omega$ , soit la période de rotation de la Terre, comme il va de soi. À la latitude de Sherbrooke ( $\sim \pi/4$ ), la période de rotation est d'environ  $33\frac{1}{2}$  heures.
- La précession du pendule a été démontrée publiquement par FOUCAULT en 1851 et constitue une preuve que c'est la Terre qui est en rotation sur elle-même et non la voûte céleste!

On peut se demander, avec raison, si la formule (9.50) est spécifique à l'hypothèse que  $\dot{\varphi}$  est constant, ou si elle est plus générale. Pour s'en assurer, on peut introduire une nouvelle coordonnée angulaire  $\alpha$  qui tourne à la vitesse de précession présumée du pendule, c'est-à-dire qu'on définit

$$\varphi = -\Omega \sin \lambda t + \alpha \implies \dot{\varphi} = -\Omega \sin \lambda + \dot{\alpha} \quad (9.51)$$

En substituant dans l'équation (9.48), on trouve simplement

$$\rho \ddot{\alpha} + 2\dot{\rho} \dot{\alpha} = 0, \quad (9.52)$$

En multipliant par le facteur intégrant  $\rho$ , on trouve une dérivée totale :

$$0 = \rho^2 \ddot{\alpha} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\alpha} = \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\alpha}) \quad (9.53)$$

et on conclut que  $\rho^2 \dot{\alpha}$  est constant. Cette quantité (multipliée par  $m$ ) est en fait la composante en  $z$  du moment cinétique du pendule, mais évaluée dans un repère tournant à la vitesse de précession. Le fait que cette quantité soit constante dans le temps signifie que le pendule, en fonction de la coordonnée  $\alpha$ , se comporte exactement comme un pendule ordinaire en fonction de la coordonnée  $\varphi$ , mais dans un référentiel inertiel. Dans ce cas, le mouvement du pendule ne montre aucune précession, mais une orbite elliptique dont l'orientation est fixe (avec le point d'équilibre au centre de l'ellipse et non à l'un des foyers). On en conclut que, même en ne supposant pas que  $\dot{\varphi}$  est constant, la précession du pendule s'accomplit à la vitesse  $-\Omega \sin \lambda$ .

## C

### Mouvement libre d'un rigide : équations d'Euler\*

Nous avons affirmé à la section 8.H que le mouvement d'un objet rigide sur lequel ne s'applique aucun couple est plus facile à étudier dans un système d'axes liés à l'objet, en particulier si ces axes sont des axes principaux de l'objet. Un tel système d'axes constitue un référentiel tournant. La relation (9.11) nous permet maintenant d'étudier plus en profondeur le mouvement d'un tel objet.

Si aucun couple ne s'applique sur l'objet, son moment cinétique (évalué au centre de masse) est constant. Cependant, les composantes du moment cinétique par rapport au système d'axes fixes à l'objet ne sont pas constantes. Désignons par  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  les trois vecteurs unitaires dirigés le long des axes principaux, fixes par rapport à l'objet. Plaçons-nous dans ce système d'axes tournants; la vitesse angulaire du référentiel est  $\boldsymbol{\omega}$ , soit la vitesse angulaire de l'objet. Dans ce référentiel, les composantes du moment cinétique ne sont pas constantes; leurs dérivées par rapport au temps sont obtenues par la relation (9.11) :

$$\left( \frac{d\mathbf{J}}{dt} \right)_i = \left( \frac{d\mathbf{J}}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{J} = 0 \quad (9.54)$$

Comme  $\mathbf{J} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice d'inertie, cette équation peut s'écrire

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (9.55)$$

Dans le système des axes principaux, la matrice  $\mathbf{I}$  est diagonale et

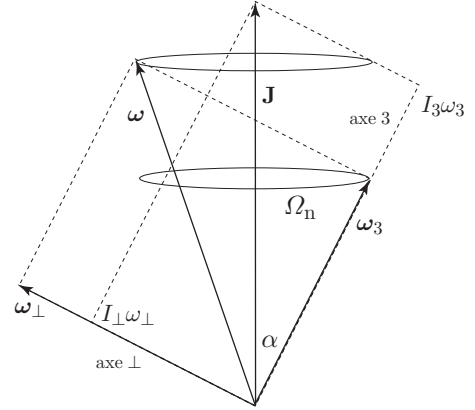
$$\mathbf{J} = I_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3 \quad (9.56)$$

L'équation matricielle ci-haut équivaut au système d'équations suivant, appelé *équations d'Euler* :

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9.57)$$

**FIGURE 9.5**

Orientation relative des vecteurs  $\mathbf{J}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  dans le problème de la nutation d'un objet libre.



Supposons maintenant que l'objet possède un axe de symétrie – disons l'axe 3 – et donc que  $I_1 = I_2 = I_\perp$  et ce système d'équations se réduit à

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \gamma \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \gamma \omega_3 \omega_1 &= 0 \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{I_3 - I_\perp}{I_\perp} \\ \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9.58)$$

Donc, dans ce cas,  $\omega_3$  est constant. D'autre part, en différentiant la première équation et en substituant dans la deuxième, on trouve

$$\ddot{\omega}_1 + (\gamma \omega_3)^2 \omega_1 = 0 \quad (9.59)$$

La solution de cette équation nous est bien connue :

$$\omega_1(t) = A \cos(\Gamma t + \phi) \quad \Gamma = \gamma \omega_3 \quad (9.60)$$

où  $A$  et  $\phi$  sont des constantes déterminées par les conditions initiales. De même,  $\omega_2$  oscille avec la même fréquence et s'obtient directement de la première des équations (9.58) :

$$\omega_2(t) = -A \sin(\Gamma t + \phi) \quad (9.61)$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\omega}_\perp = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2$  tourne donc dans le temps dans ce référentiel, à une fréquence  $\Gamma = \gamma \omega_3$ . La grandeur  $\omega_\perp$  de cette projection est fixe dans le référentiel lié à l'objet, et donc dans le référentiel inertiel également (la grandeur d'un vecteur ne change pas d'un référentiel inertiel à un référentiel en rotation). D'autre part, comme  $\omega_3$  est constant, la grandeur du vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  est fixe dans les deux référentiels, mais ce vecteur précesse autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$  dans le référentiel fixe à l'objet. Ce mouvement de rotation est appelé *nutation*.

Considérons maintenant la figure 9.5. Le vecteur  $\mathbf{J}$  est fixe dans l'espace. Nous venons de voir aussi que le vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  tourne autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$ ; la fréquence de cette rotation, vue du référentiel lié à l'objet, est  $\Gamma$ . Comme

$\omega_3$  est constant dans le temps,  $I_3\omega_3 = J_3$  l'est aussi : la composante de  $\mathbf{J}$  le long de l'axe  $\mathbf{e}_3$  est constante dans le temps et donc l'angle  $\alpha$  entre  $\mathbf{e}_3$  et  $\mathbf{J}$  est constant. Enfin, la projection de  $\boldsymbol{\omega}$  sur  $\mathbf{J}$  est elle-aussi constante dans le temps, car l'énergie cinétique de rotation, qui est constante, est  $\frac{1}{2}\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$  ; les grandeurs de  $\mathbf{J}$  et de  $\boldsymbol{\omega}$  étant constantes, l'angle entre  $\mathbf{J}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  l'est donc aussi. Donc les trois vecteurs  $\mathbf{e}_3$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  et  $\mathbf{J}$  sont rigides les uns par rapport aux autres. Appelons  $S_3$  le référentiel dans lequel ces trois vecteurs sont fixes. Ce référentiel, donc l'axe  $\mathbf{e}_3$  et le vecteur  $\boldsymbol{\omega}$ , tourne autour de  $\mathbf{J}$  à une fréquence  $\Omega$ , la véritable fréquence de nutation observée, qui n'est pas identique à  $\Gamma$ , comme nous allons le voir.

Le référentiel  $S_3$  est en rotation par rapport aux axes fixes à l'objet. La vitesse angulaire de cette rotation est précisément  $\Gamma\mathbf{e}_3$  : c'est la vitesse angulaire de  $\boldsymbol{\omega}$  par rapport aux axes fixes, tel que démontré par les équations d'Euler. Or, la rotation de  $S_3$  par rapport à l'espace – de vitesse angulaire  $\Omega\mathbf{e}_z$  – est la *composition* de la rotation de  $S_3$  par rapport à l'objet – de vitesse angulaire  $\Gamma\mathbf{e}_3$  – et de la rotation de l'objet par rapport à l'espace – de vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$ . Autrement dit, la rotation de  $S_3$  par rapport à l'espace s'obtient en ajoutant deux mouvements de rotation – et donc deux vitesses angulaires, comme suit :

$$\Omega\mathbf{e}_z = \Gamma\mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\omega} \quad (9.62)$$

En projetant cette relation sur le vecteur  $\mathbf{e}_3$ , on trouve

$$\Omega \cos \alpha = \Gamma + \omega_3 = \frac{I_3}{I_1} \omega_3 \quad (9.63)$$

La fréquence de nutation est donc

$$\Omega = \frac{I_3}{I_1} \frac{\omega_3}{\cos \alpha} \quad (9.64)$$

Par exemple, dans le cas d'un disque plat de rayon  $a$ , on montre que  $I_1 = \frac{1}{4}ma^2$  et on sait que  $I_3 = \frac{1}{2}ma^2$ . Si la nutation est de petite amplitude ( $\alpha$  petit), alors  $\cos \alpha \approx 1$  et la fréquence de nutation observée est environ deux fois la vitesse angulaire de rotation  $\omega_3$  de l'objet. Si une flèche, dessinée sur le disque, en indiquait l'orientation, alors deux périodes de nutation se produiraient dans le temps que la flèche fait une rotation complète.

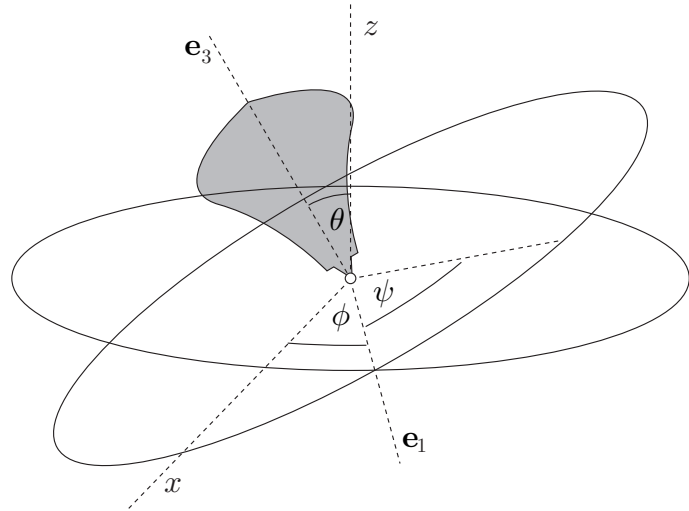
Il est tentant d'appliquer ce calcul à la rotation de la Terre. La Terre étant légèrement aplatie mais symétrique par rapport à son axe, on a  $I_1 = I_2 < I_3$ . On évalue le rapport  $\gamma$  à

$$\gamma = \frac{I - I'}{I'} \approx 0,00327 \quad (9.65)$$

En théorie, la période  $\Gamma$  de nutation de la Terre (par rapport aux axes fixes à la Terre) devrait être de 306 jours. Cependant, la réalité est plus compliquée, car la Terre n'est pas un objet parfaitement rigide ! Un mouvement de nutation de faible amplitude (environ 15 m d'amplitude au pôle Nord) est observé, mais il n'est pas régulier, c'est-à-dire qu'il est la superposition de plusieurs mouvements de fréquences différentes. Il comporte une composante annuelle attribuée aux saisons (reliée au mouvement des masses d'air, etc.) et une autre composante importante d'une période de 420 jours, qui correspond plus à la nutation prédite. Cette période plus longue que prévu (420 jours au lieu de 306) peut être attribuée à l'élasticité interne de la Terre.

**FIGURE 9.6**

Définition des angles d'Euler. Le plan perpendiculaire à l'axe de la toupie coupe le plan  $x y$  le long de la ligne des noeuds (axe  $\mathbf{e}_1$ ), et cette ligne fait un angle  $\phi$  avec l'axe des  $x$ . L'axe de la toupie ( $\mathbf{e}_3$ ) est incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à la verticale (l'axe des  $z$ ). Cette rotation d'un angle  $\theta$  est effectuée autour d'un axe  $\mathbf{e}_1$ . Ensuite, la toupie effectue une rotation d'angle  $\psi$  par rapport à son axe.



## D La toupie symétrique : angles d'Euler\*

Dans cette section nous allons étudier plus en détail le mouvement de précession et de nutation d'une toupie ou d'un gyroscope dont un point est fixe. Nous ne supposons pas nécessairement que la toupie est rapide ou que la précession est uniforme, contrairement à ce qui a été fait à la section 8.G. Pour ce faire, il est toutefois utile d'utiliser des axes fixes à l'objet, donc un référentiel tournant.

### 9.D.1 Angles d'Euler

Commençons par introduire les angles d'Euler, qui permettent de spécifier de manière simple la configuration de rotation d'un objet rigide. Considérons la figure 9.6. Les trois angles d'Euler  $\theta, \phi, \psi$  y sont définis et spécifient à un instant donné la configuration (ou l'orientation) de la toupie de manière unique (il y a cependant ambiguïté lorsque  $\theta = 0$  exactement). Lors du mouvement de rotation de l'objet, chacun de ces angles varie, et la vitesse angulaire instantanée de la toupie est la somme des vitesses angulaires associées à chacun de ces angles, c'est-à-dire à chacune des rotations élémentaires qui constituent la rotation globale de l'objet :

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_z + \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 \quad (9.66)$$

Il est bon de méditer un moment sur cette équation. La nature vectorielle de la vitesse angulaire permet justement de combiner plusieurs mouvements de rotation en un seul, simplement en additionnant (vectoriellement) les vitesses angulaires. L'axe  $\mathbf{e}_3$  est lié à l'objet : c'est son axe de symétrie. Cependant, l'axe  $\mathbf{e}_1$  ne l'est pas : il est simplement défini par la ligne des noeuds. Enfin, on peut définir un axe  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ . Ces axes sont mobiles, même s'ils ne sont pas entièrement liés à l'objet. Lors d'un mouvement de précession uniforme, par exemple, les trois axes  $\mathbf{e}_{1,2,3}$  précessent autour de l'axe  $\mathbf{e}_z$ , de sorte que  $\theta$  et  $\dot{\phi}$  sont constants dans le temps. L'axe  $\mathbf{e}_z$  peut être exprimé en fonction de  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  comme

$$\mathbf{e}_z = \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 \quad (9.67)$$

et donc la vitesse angulaire de rotation de l'objet s'exprime comme

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{e}_3 \quad (9.68)$$



En particulier, la vitesse angulaire de l'objet par rapport à son axe, son «spin», est donnée par

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \quad (9.69)$$

Notons que cette vitesse angulaire de spin n'est pas simplement  $\dot{\psi}$ , car le mouvement de précession ( $\dot{\phi}$ ) y contribue aussi. Notons aussi que la vitesse angulaire de l'objet ( $\omega$ ) ne coïncide pas avec la vitesse angulaire  $\Omega$  du référentiel tournant utilisé, car le système d'axes  $\mathbf{e}_{1,2,3}$  ne tourne pas par rapport à l'axe de la toupie, c'est-à-dire que la rotation d'un angle  $\psi$  n'affecte pas ce système d'axes. Donc

$$\Omega = \omega - \dot{\psi} \mathbf{e}_3 = \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_2 + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_3 \quad (9.70)$$

Si  $I$  est le moment d'inertie de l'objet par rapport à son axe de symétrie, et  $I'$  son moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire, alors le moment cinétique de la toupie est

$$\mathbf{J} = I' \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + I' \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_2 + I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{e}_3 \quad (9.71)$$

La dérivée du moment cinétique dans référentiel inertiel (non tournant) est égale au couple, mais c'est la dérivée dans le référentiel tournant qui nous intéresse ici :

$$\left( \frac{d\mathbf{J}}{dt} \right)_i = \left( \frac{d\mathbf{J}}{dt} \right)_r + \Omega \wedge \mathbf{J} = \mathbf{N} \quad (9.72)$$

Si on développe cette équation en utilisant les expressions (9.68) et (9.71), on trouve le système suivant de trois équations différentielles couplées :

$$\begin{aligned} N_1 &= I'(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) + I \dot{\phi} \sin \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ N_2 &= -I'(\ddot{\phi} + 2\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta) + I \dot{\theta} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ N_3 &= I \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \end{aligned} \quad (9.73)$$

Dans le cas d'une toupie pesante, le couple est entièrement dirigé le long de l'axe  $\mathbf{e}_1$ , et vaut  $mgh \sin \theta$  ( $h$  est la distance entre le pivot de la toupie de son centre de masse). Les équations du mouvement de la toupie symétrique sont alors

$$\begin{aligned} mgh \sin \theta &= I'(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) + I \dot{\phi} \sin \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ 0 &= -I'(\ddot{\phi} + 2\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta) + I \dot{\theta} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ 0 &= I \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \end{aligned} \quad (9.74)$$

La dernière équation signifie que  $\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$  est une constante, c'est-à-dire que la vitesse angulaire de la toupie par rapport à son axe est constante. On peut donc récrire les deux premières équations comme

$$\begin{aligned} mgh \sin \theta &= I'(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) + I \omega_3 \dot{\phi} \sin \theta \\ 0 &= -I'(\ddot{\phi} + 2\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta) + I \omega_3 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (9.75)$$

et le système est alors réduit à deux variables ( $\theta$  et  $\phi$ ) qui décrivent l'orientation de l'axe de la toupie en fonction du temps.

## 9.D.2 Précession uniforme

Sans résoudre les équations (9.75) de manière exacte et complète, ce qui est d'ailleurs impossible, tournons-nous vers quelques cas particuliers. Tout d'abord, supposons que nous avons un mouvement de précession uniforme, sans nutation, de sorte que  $\theta$  est constant. Dans ce cas, les équations se simplifient :

$$\begin{aligned} mgh \sin \theta &= \dot{\phi} \sin \theta (-I' \dot{\phi} \cos \theta + I \omega_3) \\ 0 &= -I' \ddot{\phi} \end{aligned} \quad (9.76)$$

On en conclut que  $\dot{\phi}$  est une constante (la fréquence de précession) déterminée par la solution d'une équation quadratique :

$$-I' \cos \theta \dot{\phi}^2 + I \omega_3 \dot{\phi} - mgh = 0 \quad (\theta \neq 0) \quad (9.77)$$

dont la solution est

$$\dot{\phi} = \frac{I \omega_3}{2I' \cos \theta} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{4I' mgh \cos \theta}{I^2 \omega_3^2}} \right\} \quad (9.78)$$

Le signe négatif de la racine a été choisi, de sorte que dans la limite de la toupie rapide ( $I^2 \omega_3^2 \gg 4I' mgh \cos \theta$ ), on obtient le résultat connu (éq. (8.71)). Ceci se démontre par un développement du binôme de la racine carrée :

$$\dot{\phi} \approx \frac{I \omega_3}{2I' \cos \theta} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{2I' mgh \cos \theta}{I^2 \omega_3^2} \right) \right\} = \frac{mgh}{I \omega_3} \quad (9.79)$$

La solution (9.78) a le mérite de s'appliquer aussi au cas d'une toupie moins rapide, à condition bien sûr que le discriminant soit positif :

$$I^2 \omega_3^2 > 4I' mgh \cos \theta \quad (9.80)$$

Si cette condition est violée, le mouvement de précession uniforme est impossible (la toupie ne tourne pas assez vite sur elle-même).

### 9.D.3 Nutation

Supposons maintenant que la précession est presque uniforme, c'est-à-dire que les angles  $\theta$  et  $\phi$  soient presque ceux qu'on obtient lors de la précession uniforme. Nous allons étudier les petites déviations à la précession uniforme, dans le but de voir si elles conduisent à un mouvement stable et, dans l'affirmative, de calculer la fréquence des oscillations autour de ce mouvement stable. On procède donc au remplacement suivant dans les équations (9.75) :

$$\theta \rightarrow \theta + \delta\theta \quad \phi \rightarrow \phi + \delta\phi \quad (9.81)$$

et on procède à un développement de ces équations au premier ordre en  $\delta\theta$  ou en  $\delta\phi$ . Tous les termes qui ne contiennent ni  $\delta\theta$ , ni  $\delta\phi$  sont éliminés de l'équation, car par définition ces termes décrivent la précession uniforme qui est déjà une solution aux équations (9.75). Ceux qui restent sont les termes du premier ordre en  $\delta\theta$  et en  $\delta\phi$ , et forment les équations suivantes :

$$\begin{aligned} I' \delta \ddot{\theta} + \delta\theta (I \omega_3 \dot{\phi} \cos \theta - I' \dot{\phi}^2 \cos 2\theta - mgh \cos \theta) + \delta\dot{\phi} (I \omega_3 \sin \theta - I' \dot{\phi} \sin 2\theta) &= 0 \\ -I' \sin \theta \delta \ddot{\phi} + \delta\dot{\theta} (I \omega_3 - 2I' \dot{\phi} \cos \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (9.82)$$

Ce système d'équations différentielles linéaires pour  $\delta\theta$  et  $\delta\phi$  peut se résoudre en différenciant la deuxième équation et en y substituant la première (notons que seules les variations  $\delta\theta$  et  $\delta\phi$  sont dérivées par rapport au temps, les angles  $\theta$  et  $\phi$  étant considérés comme constants). On trouve alors une équation du type

$$\frac{d^3 \theta}{dt^3} + \gamma^2 \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (9.83)$$

où  $\gamma$  est la fréquence de l'oscillation, ou de la nutation, autour de la solution de précession uniforme. Dans le cas d'une toupie rapide, la solution est simple, car on peut alors négliger  $\dot{\phi}$  devant  $\omega_3$ , et aussi  $mgh$  devant  $I \omega_3 \dot{\phi}$  (selon le résultat (9.79)) et on trouve le système d'équations simplifié

$$\begin{aligned} I' \delta \ddot{\theta} + \delta\theta I \omega_3 \dot{\phi} \cos \theta + \delta\dot{\phi} I \omega_3 \sin \theta &= 0 \\ -I' \sin \theta \delta \ddot{\phi} + \delta\dot{\theta} I \omega_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9.84)$$

En différentiant la deuxième équation et en y substituant la première, on trouve

$$\frac{d^3\theta}{dt^3} + \left( \frac{I\omega_3\dot{\phi}\cos\theta}{I'} + \frac{I^2\omega_3^2}{I'^2} \right) \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (9.85)$$

ou encore, en négligeant  $\dot{\phi}$  devant  $\omega_3$ ,

$$\frac{d^3\theta}{dt^3} + \frac{I^2\omega_3^2}{I'^2} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (9.86)$$

La solution à cette équation est une oscillation

$$\dot{\theta}(t) = A \cos(\gamma t + \alpha) \quad \gamma = \frac{I\omega_3}{I'} \quad (9.87)$$

Dans ce cas (toupie rapide), la fréquence de nutation  $\gamma$  ne dépend pas du couple exercé.

#### 9.D.4 Toupie dormante

Examinons maintenant le cas particulier d'une toupie qui tourne rapidement à la verticale, et étudions la stabilité d'un tel mouvement. Posons  $\theta = 0$  dans les équations (9.82). On trouve alors

$$\begin{aligned} I'\delta\ddot{\theta} + \delta\theta(I\omega_3\dot{\phi} - I'\dot{\phi}^2 - mgh) &= 0 \\ \delta\dot{\theta}(I\omega_3 - 2I'\dot{\phi}) &= 0 \end{aligned} \quad (9.88)$$

La deuxième équation nous permet d'éliminer  $\dot{\phi}$  en faveur de  $\omega_3$  et la première équation devient alors

$$\delta\ddot{\theta} + \delta\theta \left( \frac{I^2\omega_3^2}{4I'^2} - \frac{mgh}{I'} \right) = 0 \quad (9.89)$$

Cette équation admet une solution oscillante si l'expression entre parenthèses, qui multiplie  $\delta\theta$ , est positive. Elle est alors le carré de la fréquence de ces oscillations. Si cette expression est négative, alors la solution à l'équation est de type exponentiel et non sinusoïdal et l'axe de la toupie est instable ( $\delta\theta$  augmente exponentiellement dans le temps). La condition de stabilité de l'axe est donc

$$\frac{I^2\omega_3^2}{4I'^2} > \frac{mgh}{I'} \quad \text{ou} \quad \omega_3^2 > \frac{4I'}{I^2} mgh \quad (9.90)$$

Une toupie dans un tel mouvement rapide et stable est qualifiée de «dormante». Le travail du frottement finit par réduire la vitesse angulaire  $\omega_3$ , et lorsque la condition est violée, la toupie décroche et tombe en précession rapide avant de s'arrêter.

#### 9.D.5 Diagramme énergétique et potentiel effectif

Une manière alternative d'étudier le mouvement de la toupie symétrique, sans passer par une résolution des équations (9.75) est d'utiliser la conservation de la composante en  $z$  du moment cinétique. En effet, dans ce problème, le couple étant dans la direction  $\mathbf{e}_1$ , les composantes du moment cinétique selon les axes perpendiculaires à  $\mathbf{e}_1$  sont conservées. En particulier, nous avons vu que  $J_3 = I\omega_3$  est constant. Mais c'est aussi le cas de  $J_z$ , donné par

$$\begin{aligned} J_z &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_z \\ &= \dot{\phi}(I'\sin^2\theta + I\cos^2\theta) + I\dot{\psi}\cos\theta \\ &= \dot{\phi}I'\sin^2\theta + I\omega_3\cos\theta \end{aligned} \quad (9.91)$$

Le fait que  $J_z$  soit constant dans le temps nous permet d'éliminer la variable  $\phi$  en faveur d'une seule variable, soit  $\theta$  :

$$\dot{\phi} = \frac{J_z - I\omega_3 \cos \theta}{I' \sin^2 \theta} \quad (9.92)$$

Écrivons maintenant l'énergie totale de la toupie (énergie de rotation plus énergie potentielle) et exprimons-la uniquement en fonction de  $\theta$ . On trouve

$$E = \frac{1}{2} I \omega_3^2 + \frac{1}{2} I' (\omega_1^2 + \omega_2^2) + mgh \cos \theta \quad (9.93)$$

Les composante  $\omega_{1,2}$  de la vitesse angulaire sont données en (9.68) et nous permettent d'exprimer  $E$  en fonction de  $\theta$  seulement et des quantités conservées  $\omega_3$  et  $J_z$  :

$$E = \frac{1}{2} I' \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \omega_3^2 + \frac{1}{2I'} \left( \frac{J_z - I\omega_3 \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + mgh \cos \theta \quad (9.94)$$

Nous nous retrouvons avec un problème unidimensionnel (à une seule variable  $\theta$ ) comportant une énergie cinétique «de nutation»  $\frac{1}{2} I' \dot{\theta}^2$  et une énergie potentielle effective

$$U_{\text{eff.}}(\theta) = \text{cte} + \frac{1}{2I'} \left( \frac{J_z - I\omega_3 \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + mgh \cos \theta \quad (9.95)$$

Le caractère (stable ou instable) de l'inclinaison  $\theta$  de la toupie peut donc se déduire d'une étude de ce potentiel effectif en fonction des constantes  $J_z$  et  $\omega_3$ .

Si le potentiel effectif comporte un minimum, entre  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , alors le mouvement de précession est stable (on montre que c'est le cas si la toupie est suffisamment rapide). Si l'énergie est minimale, donc égale à la valeur de ce minimum, alors  $\dot{\theta} = 0$  et le mouvement de précession est uniforme, la fréquence de précession étant déterminée par la relation (9.92). Si l'énergie totale est un peu plus grande, alors l'angle  $\theta$  oscille entre deux valeurs, et ceci correspond au mouvement de nutation.

Remarquons que le potentiel effectif diverge quand  $\theta \rightarrow 0$  en raison du dénominateur en  $\sin \theta$ , sauf si  $J_z = I\omega_3$ . Dans ce cas particulier, on trouve plutôt que

$$U_{\text{eff.}}(\theta) = \frac{J_z^2}{2I'} \frac{1-u}{1+u} + mghu \quad u \equiv \cos \theta \quad (9.96)$$

Ce potentiel admet un minimum dans le domaine  $u \in ]-1, 1[$  pour la valeur

$$u = 1 - \frac{J_z}{\sqrt{mghI'}} \quad (9.97)$$

Il faut cependant que  $u > -1$ , car  $u = \cos \theta$ . Si la valeur de  $u$  tombe en dehors du domaine  $]-1, 1[$ , c'est que le minimum du potentiel se trouve à la valeur  $u = 1$ , ou  $\theta = 0$ . On est alors en présence d'une toupie dormante. La condition de stabilité d'une toupie dormante est alors  $u < -1$ , ou encore

$$J_z > 2\sqrt{mghI'} \implies (I\omega_3)^2 > 4mghI' \quad (9.98)$$

la même condition que trouvée précédemment.

## Problèmes

### Problème 9.1

Vous venez de vous installer debout dans le métro, tenant une pomme dans votre main, et soudainement le métro démarre et garde une accélération constante  $a_0$  dans la direction  $x$ . Sous le choc, la pomme vous échappe des mains.

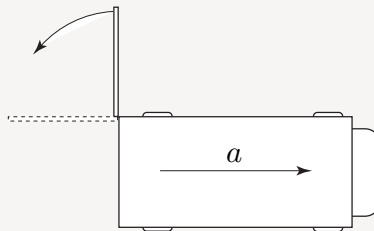
**A** Identifiez les deux forces principales agissant sur la pomme (réelles ou fictives) dans le référentiel du wagon de métro. Exprimez ces forces en fonction des vecteurs unité  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$  (on suppose bien sûr que l'axe des  $z$  est vertical).

**B** En prenant l'origine de votre système de coordonnées à vos pieds et en supposant que la pomme se trouve initialement à une hauteur  $h$  au-dessus de celle-ci, donnez une expression pour la position  $\mathbf{r}(t)$  de la pomme en fonction du temps.

**C** Dans ces circonstances, dans quelle direction devriez-vous lancer un objet pour qu'il vous revienne dessus?

### Problème 9.2

Un camion dont la porte arrière est malencontreusement restée grande ouverte démarre et maintient une accélération constante  $a$ . La porte arrière se referme en raison de cette accélération. (i) Quelle est la vitesse angulaire de la porte quand elle est alignée avec le côté du camion? (ii) Se refermera-t-elle complètement si le camion continue à accélérer? (iii) Si le camion cesse son accélération à un moment donné, qu'arrive-t-il à la porte?



### Problème 9.3

Un avion de haute performance a décidé de faire un looping original, au cours duquel ses occupants sentiront une accélération de  $1g$ , tout le long du looping. Rappelons qu'une personne ressent normalement une accélération de  $1g$  lorsqu'elle a les deux pieds au sol et une accélération de zéro  $g$  lorsqu'elle est en chute libre. La difficulté pour le pilote est de déterminer une trajectoire telle que la pesanteur apparente (la pesanteur naturelle plus celle causée par l'accélération de l'avion) soit toujours dirigée vers le plancher de l'avion, même quand l'avion a la tête en bas. Aidez le pilote en trouvant précisément la trajectoire  $\mathbf{r}(t)$  nécessaire, en supposant que le mouvement est restreint au plan  $xz$  ( $z$  étant la coordonnée verticale). Plusieurs réponses sont possibles, mais toutes avec une caractéristique commune.

#### Problème 9.4

À l'aide d'une balance à ressort de grande précision, un objet est pesé dans une ville située sur l'équateur, à midi, le 21 septembre (le Soleil est au zénith) et on obtient le poids  $P_1$ . On reprend la même mesure 12 heures plus tard, avec le résultat  $P_2$ . Montrez qu'en principe ces deux mesures ont une différence relative

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} \approx 6 \frac{M_\odot}{M_\oplus} \left( \frac{R_\oplus}{r_s} \right)^4$$

( $r_s$  est la distance Terre-Soleil). On suppose ici que le l'inhomogénéité du champ gravitationnel solaire est en cause, et on néglige l'effet de la Lune. Une telle différence est-elle mesurable en pratique?

#### Problème 9.5

Lorsqu'un objet céleste de taille modeste (ex. un astéroïde) s'approche de trop près d'un astre très massif (ex. Jupiter), il arrive que les forces de marée réussissent à le briser. Étudions ce phénomène dans un cas extrêmement simple. Un astéroïde est composé de deux objets sphériques identiques de masse  $m$ , séparés par une distance  $d$ . Cet ensemble est situé à une distance  $r \gg d$  d'une planète de masse  $M$ . Montrez que si la distance  $r$  est inférieure à la distance critique  $r_c$  donnée par

$$r_c = d(M/m)^{1/3}$$

alors la force de cohésion interne de l'astéroïde due à la gravité est plus faible que la force de marée attribuable à la planète. Dans le cas précis de deux stations spatiales de 20 tonnes chacune séparées de 5 m, comment se compare  $r_c$  avec le rayon de la Terre?

Note : si les objets ne sont pas sphériques, la formule ci-haut n'est pas exacte, mais donne néanmoins un ordre de grandeur correct.

#### Problème 9.6

Les marées, causées principalement par l'inhomogénéité du champ gravitationnel de la Lune, forment un bourrelet autour de la Terre, dont la position reste fixe par rapport à la Lune, mais qui produit un frottement entre les océans et la surface de la Terre. Ce frottement agissant toujours dans la même direction, il a tendance à ralentir la rotation de la Terre. Parallèlement, ce bourrelet modifie très légèrement l'attraction que la Terre exerce sur la Lune, car il y a un certain retard entre la direction du bourrelet et la force de marée qui le crée. Par conséquent, l'attraction de la Terre sur la Lune n'est pas exactement centrale, ce qui a pour effet d'accélérer la rotation de la Lune autour de la Terre.

**A** À l'aide d'un dessin, illustrez qualitativement ce qui est énoncé ci-haut et expliquez-le en plus amples détails.

**B** À l'aide de la loi de conservation du moment cinétique, démontrez que la distance Terre-Lune doit augmenter légèrement avec le temps.

**C** Obtenez la distance Terre-Lune et la durée du jour terrestre qui caractérise l'état stable du système, quand l'effet décrit ci-haut ne fonctionne plus. N.B. On néglige ici l'effet du Soleil sur les marées.

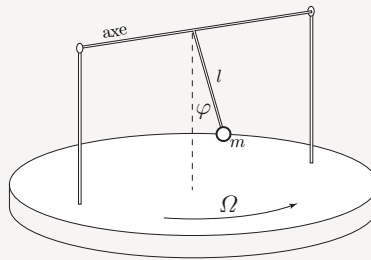
**Problème 9.7**

Un pendule rigide est lié à un axe, lui-même porté par des supports reposant sur une table tournant à une vitesse angulaire constante  $\Omega$ . Le pendule est contraint d'osciller dans le plan perpendiculaire à l'axe. On négligera la masse de la tige et le moment d'inertie de l'axe. Le point de suspension du pendule est situé sur l'axe de rotation de la table.

**A** Dans le référentiel tournant, la force centrifuge est une force centrale et on peut y associer une énergie potentielle. Donnez une expression de l'énergie potentielle totale (gravité + centrifuge)  $U(\varphi)$  de la masse du pendule, pour une valeur de  $\varphi$  quelconque (pas nécessairement petite).

**B** Trouvez l'angle d'équilibre stable  $\varphi_0$  du pendule. Quelle est la valeur minimale  $\Omega_0$  de la vitesse angulaire en deçà de laquelle  $\varphi_0 = 0$ ?

**C** Si  $\Omega < \Omega_0$ , montrez que la fréquence des petites oscillations du pendule par rapport à la verticale est  $\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}$ .

**Problème 9.8**

Une rivière de largeur  $D$  coule vers le nord à une vitesse  $v$ , à une latitude  $\lambda$ .

**A** Montrez que l'effet de la force de Coriolis dans ce cas est que le niveau de la rive droite est plus élevé que celui de la rive gauche, d'une quantité  $\Delta h$  donnée par

$$\Delta h = \frac{2D\Omega v \sin \lambda}{g}$$

où  $\Omega$  est la fréquence angulaire de la rotation de la Terre sur elle-même. Vous devez supposer que la grandeur de l'accélération de Coriolis est petite en comparaison de  $g$ .

**B** Que donne numériquement le résultat de (a) pour une rivière de 1 km de large s'écoulant à 5 km/h à la latitude de Sherbrooke ( $45^\circ$ )?

**Problème 9.9**

Supposez qu'on se trouve à l'équateur et qu'on tire une balle de fusil exactement à la verticale. Négligeons la résistance de l'air.

**A** Dans quelle direction pointe la force de Coriolis lors de l'ascension de la balle? Lors de sa descente?

**B** Adoptons un système de coordonnées tel que  $\mathbf{e}_z$  pointe à la verticale et  $\mathbf{e}_x$  vers l'est. Montrez que la

composante en  $x$  de la vitesse obéit à l'équation suivante :

$$\dot{v}_x = -2\Omega v_z$$

où  $\Omega$  est la vitesse angulaire de la rotation de la Terre sur elle-même.

**C** Montrez que la balle ne retombera pas exactement à son point de départ, mais un peu plus à l'ouest, à une distance

$$x = -\frac{4\Omega v_0^3}{3g^2}$$

où  $v_0$  est la vitesse initiale de la balle et  $g$  est l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre. Estimez cette distance numériquement si  $v_0 \sim 500$  m/s.

### Problème 9.10

Le but de cet exercice est d'estimer l'effet de la force de Coriolis sur la précision d'un tir. Le tir de projectiles sur de grandes distances doit être calculé en tenant compte de plusieurs facteurs, dont la résistance de l'air et la force de Coriolis. Pour simplifier les choses, nous négligerons ici la résistance de l'air. Un projectile est tiré vers le nord, à une latitude  $\lambda$  et l'angle de tir est  $\theta$ . Adoptons un système de coordonnées cartésiennes :  $\mathbf{e}_z$  est vertical (par rapport à la surface de la Terre),  $\mathbf{e}_y$  pointe vers le nord et  $\mathbf{e}_x$  vers l'est. Sans rotation de la Terre, le point de chute du projectile devrait être à la même longitude que le point de tir. La force de Coriolis cause une déviation  $\Delta x$  du point de chute. Obtenez une expression pour cette déviation  $\Delta x$  exprimée seulement en fonction de la portée  $p$  du tir, de  $g$ ,  $\lambda$ ,  $\theta$  et  $\Omega$  (la fréquence de rotation de la Terre sur elle-même). Indice : comme la force de Coriolis est petite en comparaison de la force de gravité, obtenez premièrement la trajectoire (dans le plan  $yz$ ) sans tenir compte de la force de Coriolis et utilisez le résultat pour calculer le mouvement en  $x$  du projectile à l'aide de la force de Coriolis. Que vaut  $\Delta x$  pour un tir d'une portée de 10 km à un angle de  $\theta = 45^\circ$  et une latitude  $\lambda = 45^\circ$  ?

### Problème 9.11

Soit  $g_0$  la grandeur de l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre. En supposant que la Terre est parfaitement sphérique, cette accélération est la même partout. Cependant, l'accélération  $g$  ressentie vraiment doit tenir compte des forces fictives dues à la rotation de la Terre sur elle-même, avec vitesse angulaire  $\Omega$ . Si  $R$  est le rayon terrestre et  $x \equiv R\Omega^2/g_0$ , montrez que l'accélération ressentie à la latitude  $\lambda$  est

$$g = g_0 \sqrt{1 - (2x - x^2) \cos^2 \lambda}$$

Quelle est la différence, en pourcentage, entre les accélérations ressenties au pôle Nord et à l'équateur ?

Note : en réalité, la forme aplatie de la Terre est la cause d'une variation de  $g$  en fonction de  $\lambda$  comparable en importance à celle calculée ici.

### Problème 9.12

Vous êtes dans un référentiel tournant, par exemple sur un manège, dans un parc. Vous observez un lampadaire (fixe par rapport au parc). De votre point de vue, quel genre de trajectoire décrit ce lampadaire et quelles sont les forces (fictives) qui le contraignent à suivre une telle trajectoire ? Guidez-vous à l'aide d'un dessin.



**Problème 9.13**

Considérez le dispositif illustré, appelé gyrocompas. Le gyrocompas comporte deux axes reposant sur des roulements à billes et donc le long desquels aucun couple ne peut être appliqué. Ces axes sont l'axe  $x$  indiqué, ainsi que l'axe de rotation du volant d'inertie, rotation qui s'effectue à une vitesse angulaire  $\omega$ . Désignons par  $\mathbf{e}$  un vecteur unitaire dirigé le long de cet axe de rotation, de sorte que la vitesse angulaire du volant d'inertie est  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$ . Le gyrocompas repose en plus sur une plate-forme tournant autour d'un axe vertical à une vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ . En pratique, un moteur garde la vitesse  $\omega$  constante, et la plate-forme tournante n'est autre que la Terre en rotation sur elle-même. Le but du problème est de montrer que l'axe  $\mathbf{e}$  finit par être parallèle à  $\mathbf{e}_z$  et que cette position est stable, de sorte que le gyrocompas peut être utilisé comme instrument de navigation indiquant le nord.

**A** Soit  $I$  le moment d'inertie du gyrocompas par rapport à l'axe  $\mathbf{e}$  et  $I'$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $x$  (cet axe est fixe dans le référentiel tournant). Sachant que la composante en  $x$  du couple doit être nulle, montrez que ceci implique la relation

$$\dot{J}_x - \Omega J_y = 0$$

Indice : la relation (9.11) des notes est certainement utile.

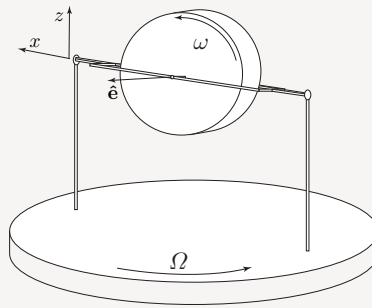
**B** Par construction, l'axe  $\mathbf{e}$  est situé dans le plan  $yz$ . Soit  $\theta$  l'angle que fait cet axe avec  $\mathbf{e}_z$ , considéré positif s'il incline vers l'axe  $y$ , négatif dans le cas contraire. Montrez que l'équation ci-haut est équivalente à

$$I' \ddot{\theta} + I \Omega \omega \sin \theta = 0$$

Faites bien attention aux signes !

**C** Montrez que l'axe  $\mathbf{e}$ , en conséquence de cette équation, se trouve à osciller autour de l'axe  $z$ . Donnez la fréquence  $\alpha$  de cette oscillation dans l'approximation où  $\theta$  est petit.

**D** Que se passe-t-il selon vous si le roulement à billes de l'axe des  $x$  est sujet à un léger frottement ?





# CHAPITRE 10

## RELATIVITÉ RESTREINTE

### A Principe de relativité

Le principe de relativité stipule que les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels, c'est-à-dire que la description des phénomènes physiques se fait de la même façon dans tous les référentiels inertiels. Autrement dit, il n'y a pas de référentiel particulier qu'on puisse qualifier d'*absolu*. Ce principe est avant tout un *fait d'expérience* et non pas un préjugé philosophique. Concrètement, il signifie qu'un observateur placé dans une 'boîte noire' au milieu de l'espace – un vaisseau spatial, si vous préférez – ne pourrait mener aucune expérience lui permettant d'affirmer qu'il se déplace à une vitesse absolue. Par exemple, s'il mesure la période d'un pendule à un certain instant, que son vaisseau accélère ensuite pendant une courte période pour se retrouver à une vitesse différente (mais constante), une nouvelle mesure de la période du pendule donnerait exactement le même résultat qu'auparavant.

#### 10.A.1 Transformation de Galilée

Pour appliquer ce principe et lui donner un contenu pratique, il faut connaître la transformation des coordonnées et du temps qui nous permet de passer d'un référentiel inertiel à un autre. À cet effet, la *transformation de Galilée* (2.62) a longtemps reçu l'appui de l'expérience et du bon sens. On appelle *relativité galiléenne* l'étude des transformations de Galilée et de leurs conséquences.

Nous avons établi à l'éq. (2.62) la relation entre les positions et le temps dans deux référentiels inertiels se déplaçant l'un par rapport à l'autre à une vitesse  $\mathbf{V}$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{V}t \\ t' &= t\end{aligned}\tag{10.1}$$

Insistons sur le fait que cette transformation n'est pas la seule qui soit compatible avec le principe de relativité. Elle est en fait incorrecte quand  $V$  n'est pas très petit par rapport à la vitesse de la lumière. Nous verrons plus loin comment la modifier en conséquence. Pour le moment, contentons-nous de montrer comment les lois du mouvement de Newton sont invariantes par rapport à la transformation (10.1).

Nous avons vu en (2.63) comment la vitesse se transforme lors d'une transformation de Galilée et comment l'accélération est invariante par la même transformation. La deuxième loi de Newton,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  sera aussi invariante par transformation de Galilée si la masse est la même dans les deux référentiels (on considère la masse comme une propriété intrinsèque de l'objet, indépendante de sa vitesse) et si  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ . Pour que cette dernière condition soit réalisée, il faut que la force exercée sur un objet ne dépende pas de la vitesse de cet objet par rapport au référentiel, mais uniquement par rapport aux autres objets en interaction avec lui. En général, si on considère un système de  $N$  particules à des positions  $\mathbf{r}_i$  et ayant des vitesses  $\mathbf{v}_i$ , on doit supposer que la force totale  $\mathbf{F}_i$  exercée sur la  $i^e$  particule ne dépend que des positions relatives  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  et des vitesses

relatives  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$  (ceci est vrai pour toutes les forces connues). En effet, ces quantités sont invariantes par transformation de Galilée :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j &= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \\ \mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_j &= \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\end{aligned}\tag{10.2}$$

Pour des lois de force respectant ces conditions, les lois du mouvement de Newton sont donc invariantes par transformation de Galilée.

Il faut cependant noter que l'invariance galiléenne est en apparence violée si une particule se déplace, par exemple, dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$  et qu'on omet de transformer le champ en  $\mathbf{B}'$ , le champ magnétique dans le référentiel  $S'$ . De même, un objet en mouvement dans un milieu et qui subit une force dépendant de sa vitesse dans le milieu n'obéira pas (en apparence) au principe de Galilée si on omet d'effectuer également la transformation de Galilée sur le milieu.

## B Invariance de la vitesse de la lumière

Le fait capital qui rend invalide la relativité galiléenne est que *la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels inertiels*. C'est un fait expérimental, démontré en premier par l'expérience de Michelson et Morley et ses rééditions, ainsi que par les nombreuses applications quotidiennes de la théorie de la relativité restreinte, en particulier dans les accélérateurs de particules. C'est aussi une nécessité théorique si on accepte le principe de relativité et les lois de l'électromagnétisme de Maxwell. C'est d'ailleurs cette nécessité théorique qui motiva les travaux d'Einstein, bien plus que l'expérience de Michelson et Morley. Sans aller dans les détails, qui relèvent d'un cours d'électromagnétisme plus que d'un cours de mécanique, mentionnons que les lois de Maxwell réussissent à intégrer dans un tout cohérent les phénomènes électriques, magnétiques et optiques. La lumière y est interprétée comme une onde de champs électrique et magnétique se propageant à la vitesse  $c$ , vitesse déterminée par les constantes électriques et magnétiques. Or, si on accepte le principe de relativité, les lois de la physique, dont les équations de Maxwell, doivent être les mêmes dans tous les référentiels et la vitesse de la lumière doit donc aussi être la même dans tous les référentiels. Logiquement, on doit soit (1) supposer que le principe de relativité est incorrect et qu'il y a donc un référentiel absolu (celui de l'éther, milieu hypothétique dans lequel se propage la lumière), soit (2) admettre que la transformation de Galilée est incorrecte. C'est ce dernier choix qu'a fait Einstein et que l'expérience a démontré être le bon.

### 10.B.1 Mesures de la vitesse de la lumière

Avant de tirer les conséquences de l'invariance de la vitesse de la lumière, expliquons les différentes méthodes qui ont permis de la mesurer et de constater son invariance.

La première tentative connue de mesurer la vitesse de la lumière est attribuée à Galilée, qui basa son estimation sur la vitesse de transmission d'un signal lumineux entre les sommets de deux collines, telle que perçue par le temps de réaction d'un humain (!). Il va sans dire qu'il en conclut que la vitesse de la lumière était très grande, sinon infinie.

Auteur	Année	Méthode	c (km/s)
Fizeau	1849	miroir tournant	315 300
Foucault	1862	miroir tournant	298 000 ± 500
Michelson	1927	miroir tournant	299 796 ± 4
Essen	1950	cavité électromagnétique	299 792,5±1
Aslakson		SHORAN (radar)	299 794,2 ± 1,9
	1983	Valeur définie	299 792,458

**TABLE 10.1**  
Valeurs de  $c$  obtenues par diverses expériences ‘directes’.

### Roemer

On doit la première estimation réelle de la vitesse de la lumière à l’astronome Roemer (1676). Il observa que la période de révolution de Io (l’un des quatre principaux satellites de Jupiter) n’est pas constante en apparence : elle augmente quand la Terre s’éloigne de Jupiter et diminue quand la Terre s’en rapproche. La variation de cette période par rapport à la période moyenne, accumulée sur six mois, fut mesurée par Roemer qui obtint  $\Delta T = 22$  minutes. Si  $D$  est le diamètre de l’orbite terrestre, il conclut que la vitesse de la lumière est  $c = D / \Delta T$ . À l’époque de Roemer,  $D$  n’était pas connu avec grande précision et Roemer obtint la valeur

$$c = 214\,300 \text{ km/s} \quad (\text{Roemer, 1676}) \quad (10.3)$$

Notons que la même mesure du retard par les méthodes actuelles donne  $\Delta T = 17$  minutes.

### Aberration des étoiles

La vitesse finie de la lumière donne lieu à un autre phénomène astronomique : l’aberration des étoiles, découverte par l’astronome Bradley (1725). Il s’agit d’un mouvement apparent des étoiles, qui décrivent des orbites circulaires (ou elliptiques) d’un diamètre apparent de  $41''$  et d’une période d’un an. Comme ce ‘mouvement’ est commun à toutes les étoiles, il doit évidemment être attribué à la rotation de la Terre autour du Soleil et non à un mouvement propre des étoiles. Supposons, pour simplifier, que l’étoile est au pôle Nord de l’écliptique, de sorte que la lumière qui nous en parvient suit un rayon perpendiculaire au mouvement de la Terre autour du Soleil. Les grains de lumière qui nous parviennent du zénith de l’écliptique, dans le référentiel du Soleil, font un angle  $\alpha$  avec le zénith quand on les observe à partir du référentiel terrestre, où  $\alpha$  est déterminé par le rapport de la vitesse  $v$  de la Terre à celle de la lumière :

$$\tan \alpha = \frac{v}{c} \quad (10.4)$$

Connaissant  $v$ , on trouve effectivement une aberration de  $41''$ , avec la valeur moderne de  $c$ . Bien sûr, si on mesure l’aberration, comme l’a fait Bradley, on peut en déduire une valeur de  $c$  si on connaît suffisamment bien la vitesse de la Terre par rapport au Soleil.

### Mesures terrestres de $c$

En 1849, Fizeau effectua une mesure directe de la vitesse de la lumière à l’aide d’un miroir tournant et d’une roue dentée hachant un faisceau lumineux parcourant un trajet de  $2 \times 8633 \text{ m}$ . Cette méthode fut couramment utilisée par la suite, entre autres par Foucault et par Michelson. Les valeurs de quelques mesures modernes de  $c$  sont données au tableau 10.1.

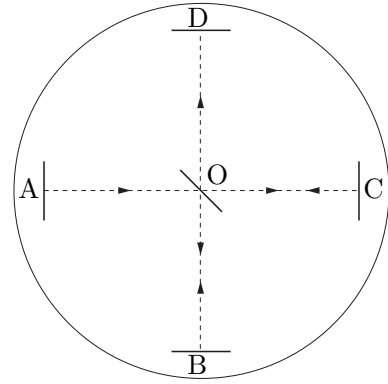
Depuis 1983, la vitesse de la lumière est une quantité *définie*, c'est-à-dire que la définition du mètre se fait par rapport à celle de la seconde, moyennant un facteur de conversion qui n'est autre que  $c$ . Cet état de fait provient de ce que les méthodes de mesure de  $c$  sont devenues plus précises que les méthodes de mesure directe des distances.

### 10.B.2 Expérience de Michelson et Morley

L'expérience de Michelson et Morley (1887)<sup>1</sup> avait pour but de détecter le mouvement de la Terre dans l'*éther*, ce milieu hypothétique reposant dans un référentiel absolu, dans lequel devait se propager la lumière. Le résultat négatif de l'expérience démontra l'inexistence de l'éther. Expliquons-en le principe.

Considérons la figure 10.1. Un faisceau lumineux est émis du point  $A$  en direction de  $C$ , mais frappe un miroir semi-transparent au centre du dispositif (point  $O$ ), qui dévie la moitié du faisceau vers  $B$ . Des miroirs aux points  $B$  et  $C$  réfléchissent le faisceau scindé vers le miroir semi-transparent qui envoie une partie des faisceaux vers le détecteur situé en  $D$ . Supposons que l'éther existe et que la Terre se déplace à une vitesse  $V$  par rapport à l'éther, dans la direction  $AC$ . La vitesse de la lumière (par rapport à la Terre) est donc  $c - V$  quand le faisceau se dirige vers la droite,  $c + V$  quand il se dirige vers la gauche. Quand le faisceau se dirige vers le haut ou vers le bas, la composante verticale de sa vitesse est  $\sqrt{c^2 - V^2}$ , comme dans le cas de l'aberration des étoiles.

**FIGURE 10.1**  
Schéma de l'expérience de Michelson et Morley.



Les deux faisceaux lumineux qui se superposent en  $D$  sont cohérents et peuvent interférer. La différence de phase entre ces deux faisceaux est déterminée par la différence de temps  $\Delta T$  entre l'arrivée des deux faisceaux en  $D$ , à partir de leur point de départ en  $A$ . Les temps de parcours sont les suivants, en fonction des distances :

$$\begin{aligned} t_{OC} &= \frac{\overline{OC}}{c - V} & t_{CO} &= \frac{\overline{OC}}{c + V} \\ t_{OC} + t_{CO} &= \overline{OC} \left\{ \frac{1}{c - V} + \frac{1}{c + V} \right\} = \overline{OC} \frac{2c}{c^2 - V^2} \\ t_{OB} &= t_{BO} = \frac{\overline{OB}}{\sqrt{c^2 - V^2}} \end{aligned} \quad (10.5)$$

La différence de temps entre les deux trajets possibles du faisceau lumineux est donc

$$\Delta T = t_{OC} + t_{CO} - t_{OB} - t_{BO} = 2\overline{OC} \frac{c}{c^2 - V^2} - 2\overline{OB} \frac{1}{\sqrt{c^2 - V^2}} \quad (10.6)$$

Cette différence de temps produit un certain patron d'interférence en  $D$  entre les deux demi-faisceaux : elle correspond à une différence de phase

$$\Delta\phi = 2\pi f \Delta T \quad (10.7)$$

1. Michelson effectua seul une version plus simple de cette expérience dès 1881.

où  $f$  est la fréquence de la lumière utilisée.

Faisons maintenant tourner tout l'appareil de  $90^\circ$ . On peut refaire le même calcul (la direction de la vitesse  $\mathbf{V}$  a changé) mais cela revient à échanger les rôles de  $OC$  et de  $OB$  et à changer le signe du résultat. On obtiendrait alors la différence des temps

$$\Delta T' = 2\overline{OC} \frac{1}{\sqrt{c^2 - V^2}} - 2\overline{OB} \frac{c}{c^2 - V^2} \quad (10.8)$$

Cette situation produirait un patron d'interférence différent. Le changement dans le patron d'interférence serait caractérisé par la 'différence des différences de phase' :

$$\Delta\phi = 2\pi f(\Delta T - \Delta T') = 4\pi f(\overline{OC} + \overline{OB}) \left\{ \frac{c}{c^2 - V^2} - \frac{1}{\sqrt{c^2 - V^2}} \right\} \quad (10.9)$$

En supposant que  $V \ll c$ , on peut effectuer un développement de Taylor au premier ordre en  $(V/c)^2$  et on obtient

$$\Delta\phi = (\overline{OC} + \overline{OB}) \frac{2\pi f}{c} \frac{V^2}{c^2} \quad (10.10)$$

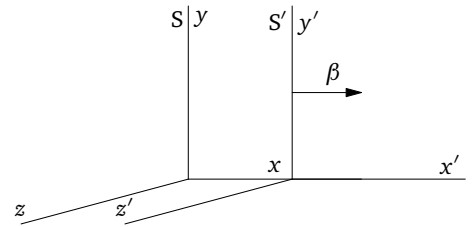
Cette 'différence des différences' devrait se traduire par un déplacement des franges d'interférence lorsque l'appareil est tourné de  $90^\circ$ . Or, un tel déplacement n'est pas observé. Bien sûr, l'effet escompté est très petit et l'expérience est très délicate. En pratique, il faut utiliser les distances les plus grandes possible (on peut les augmenter par des miroirs multiples) et disposer d'une table d'optique libre de toutes vibrations (celle de Michelson et Morley flottait sur du mercure). Il faut également penser à refaire l'expérience six mois plus tard, au cas où, par un hasard incroyable, la Terre aurait été au repos par rapport à l'éther au moment de la première expérience!

Après bien des précautions et des vérifications, le résultat de l'expérience est négatif : aucun mouvement de la Terre par rapport à l'éther ne put être détecté.

## C Transformation de Lorentz

Étant donnée l'inexistence de l'éther ou d'un référentiel absolu, il faut maintenant modifier la transformation de Galilée (10.1) pour tenir compte de l'invariance de la vitesse de la lumière. Le passage d'un référentiel à un autre se fait par un changement de coordonnées impliquant les trois coordonnées spatiales et le temps. Considérons deux référentiels  $S$  et  $S'$  se déplaçant l'un par rapport à l'autre à une vitesse  $\mathbf{V}$ . Dénotons par  $(x, y, z, t)$  les coordonnées et le temps dans le référentiel  $S$ , et  $(x', y', z', t')$  les quantités correspondantes dans le référentiel  $S'$ . On suppose, sans perte de généralité, que les axes des deux référentiels sont dans les mêmes directions, que la vitesse relative des deux référentiels est le long de l'axe des  $x$  (donc  $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$ ) et que les origines des deux référentiels coïncident au temps  $t = 0$  (et  $t' = 0$ ). On cherche une relation entre  $(x, y, z, t)$  et  $(x', y', z', t')$  compatible avec le principe de relativité, i.e., telle que la vitesse de propagation de la lumière soit la même dans les deux référentiels. Cette relation doit respecter les conditions suivantes :

**FIGURE 10.2**  
Positionnement des référentiels  $S$  et  $S'$ .



1. Elle doit être linéaire, sinon un corps au repos dans  $S$  ne serait pas en mouvement rectiligne uniforme dans  $S'$ . La relation entre  $(x, y, z, t)$  et  $(x', y', z', t')$  peut donc s'écrire à l'aide d'une matrice :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

où  $M$  est une matrice  $4 \times 4$ . Les composantes de cette matrice peuvent dépendre de la vitesse relative  $V$ .

2. Les coordonnées  $(y, z)$  perpendiculaires à la vitesse relative ne devraient pas être affectées par le changement de référentiel. Autrement dit,  $y' = y$  et  $z' = z$ . En effet, si  $\mathbf{r}_\perp$  dénote les coordonnées perpendiculaires à  $\mathbf{V}$ , la seule transformation acceptable de ces coordonnées serait  $\mathbf{r}'_\perp = K(V)\mathbf{r}_\perp$ , où  $K(V)$  est un facteur numérique qui dépend de  $V$ , tel que  $K(0) = 1$ . Par symétrie,  $K(V)$  ne doit pas dépendre du sens de  $\mathbf{V}$  :  $K(-V) = K(V)$ . Puisque la transformation inverse est

$$\mathbf{r}_\perp = K(-V)\mathbf{r}'_\perp = K(-V)K(V)\mathbf{r}_\perp \quad (10.12)$$

On doit avoir  $K(V)^2 = 1$  ou  $K(V) = 1$ . Donc les coordonnées transverses à la vitesse relative ne sont pas affectées par la transformation :  $\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp$ .

3. Donc, on cherche une transformation linéaire  $(x, t) \rightarrow (x', t')$  qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$x' = ax + bt \quad t' = ex + ft \quad (10.13)$$

Les quatre constantes  $a, b, e, f$  ne dépendent que de  $V$ , la vitesse relative des deux référentiels.

Afin de déterminer les constantes  $a, b, e, f$ , voyons comment la vitesse  $v = dx/dt$  d'un objet dans  $S$  est reliée à la vitesse dans le référentiel  $S'$  :

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{a dx + b dt}{e dx + f dt} = \frac{av + b}{ev + f} \quad (10.14)$$

Appliquons maintenant cette relation à trois cas particuliers :

1. Puisque l'origine de  $S'$  se déplace à une vitesse  $V$  dans  $S$ , on doit avoir  $v' = 0$  si  $v = V$ , ou encore  $0 = (aV + b)/(eV + f)$ . Donc  $b = -aV$ .
2. Un objet au repos dans  $S$  ( $v = 0$ ) devrait avoir une vitesse  $v' = -V$  dans  $S'$ . Autrement dit,  $v' = -V$  si  $v = 0$ , ou encore  $-V = b/f$  ou  $f = -b/V = a$ .
3. Un signal lumineux se propageant à vitesse  $c$  dans  $S$  devrait se propager à la même vitesse  $c$  dans  $S'$  :

$$c = \frac{ac + b}{ec + f}, \quad b = -aV, \quad f = a \Rightarrow e = -aV/c^2 \quad (10.15)$$

En rassemblant ces contraintes, la transformation  $(x, t) \rightarrow (x', t')$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -V \\ -V/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \equiv A(V) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (10.16)$$

où  $a(V)$  est une fonction de  $V$  encore à déterminer et  $A(V)$  est la matrice de transformation. On sait que  $a(0) = 1$ . De plus,  $a(V)$  ne devrait pas dépendre du signe de  $V$ , mais seulement de son carré, en raison de l'invariance par rapport à l'inversion de l'espace : les changements simultanés

$$x \rightarrow -x \quad x' \rightarrow -x' \quad V \rightarrow -V \quad (10.17)$$



ne devraient pas affecter la transformation. Or il se trouve que cette inversion change  $a(V)$  en  $a(-V)$  et c'est tout. On en conclut que  $a(-V) = a(V)$ . Finalement, on sait que la transformation inverse (i.e. de  $S'$  à  $S$ ) s'obtient en renversant le signe de  $V$  :  $A(V)A(-V) = 1$  ou encore

$$a(V)a(-V) \begin{pmatrix} 1 & -V \\ -V/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & V \\ V/c^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.18)$$

De cette contrainte on trouve que

$$a(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (10.19)$$

On peut donc écrire la transformation finale comme

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & t' &= \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y' &= y & z' &= z \end{aligned}} \quad (10.20)$$

Elle porte le nom de *transformation de Lorentz*.<sup>2</sup>

#### Remarques :

- ♦ La limite  $V/c \rightarrow 0$  de la transformation (10.20) donne effectivement la transformation de Galilée (10.1). Notons que ce n'est pas  $V$  qui tend vers 0, mais le rapport  $V/c$ , à  $V$  constant. Autrement dit, on fait tendre  $c \rightarrow \infty$ .
- ♦ La différence la plus frappante entre la transformation (10.20) et la transformation de Galilée (10.1) est que le temps n'est plus absolu : il se transforme d'un référentiel à l'autre.
- ♦ L'inverse de la transformation (10.20) s'obtient simplement en changeant le signe de  $V$  :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & t &= \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y &= y' & z &= z' \end{aligned}} \quad (10.21)$$

- ♦ Le rôle particulier de la coordonnée  $x$  dans la transformation (10.20) vient de ce que la vitesse relative des deux référentiels est dans cette direction. On peut aussi écrire une généralisation de (10.20) au cas d'une direction arbitraire de  $\mathbf{V}$ .
- ♦ On utilise souvent la notation suivante :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \beta = \frac{V}{c} \quad (10.22)$$

Le facteur  $\gamma$  possède le développement de Taylor suivant autour de  $V/c = 0$  :

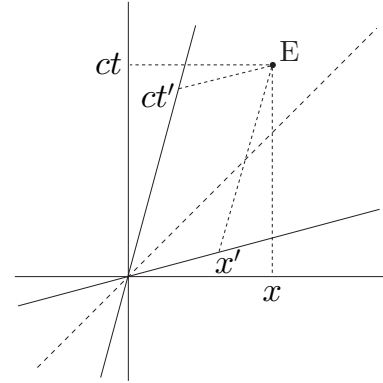
$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots \quad (10.23)$$

---

2. Poincaré proposa cette transformation (1904) pour que les équations de Maxwell soient les mêmes dans les deux référentiels  $S$  et  $S'$ , complétant une idée de Lorentz, et lui donna le nom de «transformation de Lorentz». En fait, elle fut écrite indépendamment par J. Larmor un peu avant (1900), et même par Voigt dès 1887.

**FIGURE 10.3**

Représentation graphique de l'espace-temps. L'événement E est représenté par les coordonnées  $(x, ct)$  ou  $(x', ct')$ , selon le référentiel utilisé.

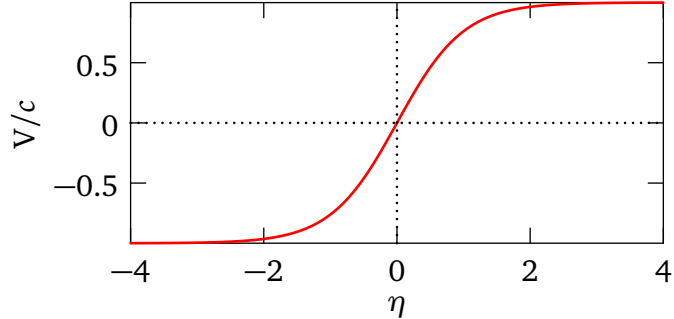


### 10.C.1 Espace-temps et intervalle

Comme le temps n'est plus absolument indépendant de l'espace – la distinction entre les deux dépend du référentiel utilisé – on parle volontiers d'*espace-temps*, un lieu géométrique auquel appartiennent des *événements*. Un événement est un point dans l'espace, considéré à un instant bien précis et à cet instant seulement. Un événement est défini en spécifiant le vecteur position  $\mathbf{r}$  et le temps  $t$ , et on le note souvent  $(\mathbf{r}, t)$ . On peut même représenter cette notion graphiquement, en portant la coordonnée  $x$  en abscisse et la coordonnée temporelle  $ct$  en ordonnée (on multiplie par  $c$  pour que les unités des deux axes soient les mêmes). Un événement E correspond alors à un point sur le plan  $(x, ct)$ . Un référentiel différent correspond alors à deux autres axes  $x'$  et  $ct'$ , comme illustré à la fig. 10.3. Une particule se déplaçant à la vitesse de la lumière (un photon) et passant par l'origine  $x = ct = 0$  est représentée par la droite  $x = ct$  (ou  $x' = ct'$ ).

**FIGURE 10.4**

Vitesse  $V$  en fonction de la rapidité  $\eta$ .



La relation entre deux référentiels  $S$  et  $S'$  ne correspond pas exactement à une rotation des axes (comparons la fig. 10.3 à la fig. 2.2). On peut cependant lui donner l'apparence mathématique d'une rotation, mais par un angle imaginaire. Expliquons. On définit la *rapidité*  $\eta$  associée à une vitesse  $V$  comme

$$\frac{V}{c} = \beta = \tanh \eta \quad (10.24)$$

L'avantage de cette définition est que

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh \eta \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sinh \eta \quad (10.25)$$

On peut donc écrire la transformation de Lorentz comme

$$\begin{aligned} x' &= x \cosh \eta - ct \sinh \eta \\ ct' &= ct \cosh \eta - x \sinh \eta \end{aligned} \quad (10.26)$$

(en plus de  $y' = y$  et  $z' = z$ ). Cette formule ressemble étrangement à la relation entre les coordonnées  $(x, y)$  et  $(x', y')$  suite à une rotation d'angle  $\theta$  des axes cartésiens :

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (10.27)$$

cette fois pour les coordonnées  $x$  et  $ct$ , sauf que ce sont des fonctions hyperboliques qui sont utilisées. En fait, comme

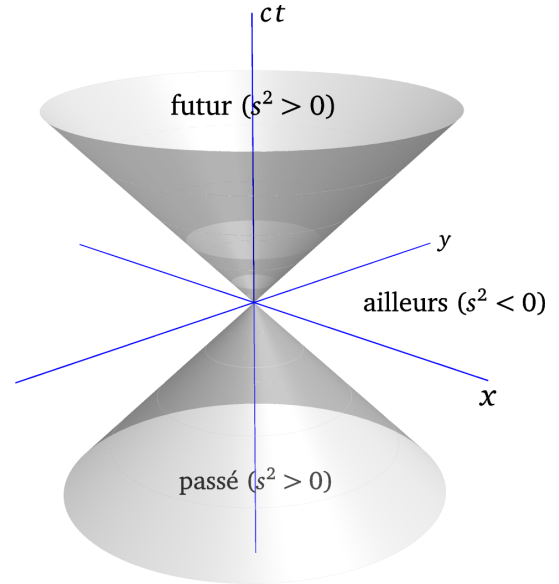
$$\cosh \eta = \cos(i\eta) \quad \text{et} \quad \sinh \eta = -i \sin(i\eta), \quad (10.28)$$

on peut récrire la transformation de Lorentz ainsi :

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(i\eta) + i c t \sin(i\eta) \\ i c t' &= -x \sin(i\eta) + i c t \cos(i\eta) \end{aligned} \quad (10.29)$$

En comparant avec la transformation (10.27), on voit qu'il s'agit formellement d'une rotation, mais par un angle imaginaire  $i\eta$ . De plus, les coordonnées subissant cette rotation sont  $(x, i c t)$  et non  $(x, c t)$ .

La différence essentielle entre la rapidité  $\eta$  et un angle  $\theta$  est que la rapidité n'est pas périodique : elle ne revient pas à elle-même après une variation de  $2\pi$ . Elle varie en fait de  $-\infty$  à  $\infty$ . Cependant, elle a ceci de commun avec l'angle de rotation que la rapidité associée à deux transformations de Lorentz successives est la somme des rapidités associées. Autrement dit, l'application successive de deux transformations de Lorentz de rapidités  $\eta_1$  et  $\eta_2$  (dans la même direction) est équivalente à une transformation de Lorentz de rapidité  $\eta_3 = \eta_1 + \eta_2$ . Ceci découle directement des lois d'addition des sinus et cosinus hyperboliques.



**FIGURE 10.5**

Le cône de lumière sépare les régions de l'espace-temps qui sont séparées de l'origine par un intervalle de genre temps ( $s^2 > 0$ ) de celles qui en sont séparées par un intervalle de genre espace ( $s^2 < 0$ ).

## 10.C.2 Intervalle

Lorsqu'on procède à une rotation des axes cartésiens en deux dimensions en suivant la formule (10.27), la distance  $l$  entre le point considéré et l'origine demeure la même dans les deux systèmes d'axes :

$$l^2 = x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2 \quad (10.30)$$

Cela se vérifie aisément par substitution. On dit que la distance entre un point et l'origine est un *invariant*, une quantité qui demeure inchangée lors de la transformation des coordonnées.

De même, en relativité, un invariant existe. Comme les coordonnées  $(x, i c t)$  se comportent mathématiquement comme les coordonnées  $(x, y)$  dans le plan, on devine que la quantité

$$x^2 + (i c t)^2 = x^2 - c^2 t^2 \quad (10.31)$$

pourrait jouer ce rôle. On définit l'*intervalle*  $s$  entre un événement  $(x, c t)$  et l'origine de l'espace-temps par

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (10.32)$$

(noter le signe relatif entre  $t^2$  et les coordonnées spatiales). L'intervalle est un invariant de la transformation de Lorentz, c'est-à-dire que

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (10.33)$$

Cette invariance se démontre aisément : il suffit de substituer la transformation de Lorentz dans l'expression  $c^2 t'^2 - x'^2$  (nous savons déjà que  $y' = y$  et  $z' = z$ ) :

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - x'^2 &= \gamma^2 (c t - \beta x)^2 - \gamma^2 (x - \beta c t)^2 \\ &= \gamma^2 [c^2 t^2 + \beta^2 x^2 - 2 c t \beta x - x^2 - \beta^2 c^2 t^2 + 2 c t \beta x] \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) (c^2 t^2 - x^2) \\ &= c^2 t^2 - x^2 \end{aligned} \quad (10.34)$$

Plus généralement, étant donnés deux événements  $E_1$  et  $E_2$  de coordonnées d'espace-temps  $(\mathbf{r}_1, c t_1)$  et  $(\mathbf{r}_2, c t_2)$ , on définit l'intervalle  $s^2$  entre les deux événements comme

$$s^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 \quad (10.35)$$

cet intervalle, ainsi que son expression mathématique en fonction des coordonnées et du temps, sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels, et ne dépendent que des deux événements  $E_1$  et  $E_2$ .

À la différence de la distance au carré  $l^2$  dans le plan cartésien, l'intervalle, malgré qu'il soit noté  $s^2$ , peut être négatif ou positif. En fait, on distingue les trois cas suivants :

1. Intervalle de genre lumière :  $s^2 = 0$ . Dans ce cas, les deux événements séparés par cet intervalle peuvent être reliés par un signal lumineux direct : L'événement 1 peut être l'émission d'un signal lumineux et l'événement 2 peut être la réception de ce signal, à un temps ultérieur. L'ensemble des événements séparés de l'origine par un intervalle de genre lumière forme un cône, appelé *cône de lumière*, illustré à la fig. 10.5.
2. Intervalle de genre temps :  $s^2 > 0$ . Dans ce cas, les deux événements séparés par cet intervalle peuvent être en relation causale : l'un des deux se produit après l'autre, et ce, dans tous les référentiels. On peut toujours trouver un référentiel dans lequel les deux événements se produisent à la même position, mais à des temps différents. Par contre, si l'un des deux événements est ultérieur à l'autre dans un référentiel, il le sera dans tous les référentiels, et vice-versa.
3. Intervalle de genre espace :  $s^2 < 0$ . Dans ce cas, les deux événements séparés par cet intervalle ne peuvent être en relation causale : on peut toujours trouver un référentiel dans lequel 1 précède 2 et un autre référentiel dans lequel 2 précède 1, ainsi qu'un troisième référentiel dans lequel ils sont simultanés.

### 10.C.3 Contraction des longueurs

Il est notoire que la théorie de la relativité prévoit que les objets en mouvement sont contractés. Voyons comment cette affirmation se déduit de la transformation de Lorentz (10.20). Considérons un objet de longueur  $L_0$  au repos dans le référentiel  $S'$ . Cet objet se déplace donc à une vitesse  $\mathbf{V} = V \mathbf{e}_x$  par rapport à  $S$ . Sa longueur dans  $S$  doit être définie comme la différence des coordonnées associées aux deux extrémités de l'objet, lorsqu'elles sont mesurées au même moment dans  $S$ , disons au temps  $t$ . Soit  $(x_1, t)$  et  $(x_2, t)$  les 'coordonnées

d'espace-temps' associées à ces deux mesures dans  $S$ . Dans le référentiel  $S'$ , ces deux mesures correspondent plutôt aux coordonnées

$$(x'_1, t'_1) = \gamma(x_1 - Vt, t - Vx_1/c^2) \quad (x'_2, t'_2) = \gamma(x_2 - Vt, t - Vx_2/c^2) \quad (10.36)$$

La différence  $x'_2 - x'_1$  est bien sûr la longueur au repos de l'objet, puisque celui-ci est stationnaire dans  $S'$ . Donc

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - Vt - x_1 + Vt) = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L \quad (10.37)$$

où  $L = x_2 - x_1$  est la longueur de l'objet telle que mesurée dans le référentiel  $S$ ; elle est donc plus petite que  $L_0$  :

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - V^2/c^2} \quad (10.38)$$

Notons que les deux mesures de position, qui sont simultanées dans  $S$ , ne le sont pas dans  $S'$ , car  $t'_2 \neq t'_1$ .

Il faut remarquer ici que si on pouvait 'photographier' un objet en mouvement très rapide, il n'apparaîtrait pas contracté : il faut bien distinguer la 'longueur de l'objet dans le référentiel  $S'$ ', qui est une propriété de l'objet et du référentiel d'observation, de son 'apparence visuelle', qui est un phénomène plus complexe puisqu'il nécessite l'émission de lumière par l'objet et la réception de cette lumière par un observateur après un certain temps de transit. En fait, un objet en mouvement rapide apparaîtrait 'tourné' par rapport à l'objet au repos, et non contracté. De plus, en raison de l'effet Doppler, ses couleurs seraient modifiées selon qu'il s'approche ou s'éloigne de l'observateur.<sup>3</sup>

## 10.C.4 Dilatation du temps

Une autre conséquence notoire de la relativité est qu'une horloge en mouvement retarde par rapport à une horloge au repos. Pour démontrer cette assertion, utilisons encore une fois la transformation de Lorentz (10.20). Considérons une horloge au repos dans le référentiel  $S'$  (à une position  $x'$ ) qui produit des 'tics' à un intervalle régulier. Cet intervalle est la période  $T_0$  de l'horloge au repos. Dans le référentiel  $S$ , l'horloge se déplace à une vitesse  $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$ . Soit  $(x_1, t_1)$  et  $(x_2, t_2)$  les coordonnées associées à deux 'tics' successifs de l'horloge. En utilisant la transformation de Lorentz inverse (10.21), on trouve

$$(x_1, t_1) = \gamma(x' + Vt'_1, t'_1 + Vx'/c^2) \quad (x_2, t_2) = \gamma(x' + Vt'_2, t'_2 + Vx'/c^2) \quad (10.39)$$

La période  $T$  de l'horloge dans  $S$  est la différence entre les temps des deux tics successifs :

$$T = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 + Vx'/c^2 - t'_1 - Vx'/c^2) = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma T_0 \quad (10.40)$$

La période  $T$  est donc plus longue que la période au repos; il y a 'dilatation du temps' :

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (10.41)$$

### Exemple 10.1 Désintégration des muons

Le muon ( $\mu$ ) est une particule élémentaire instable de masse  $m_\mu = 105,7$  MeV et de temps de vie  $\tau_\mu = 2,197 \times 10^{-6}$  s. On détecte une grande quantité de muons au niveau du sol. Ces muons sont créés dans la haute atmosphère quand

3. Cette question est expliquée de manière simple par V. Weisskopf dans *Physics Today* (sept. 1960) p.24. Weisskopf se base sur un article plus détaillé de J. Terrell, *Phys. Rev.* **116** (1959) 1041.

des rayons cosmiques (par exemple des protons ou des photons) entrent en collision avec les noyaux des molécules de l'atmosphère. Lors de ces collisions, des mésons  $\pi$  (ou *pions*) sont créés. Ces mésons ont un temps de vie  $\tau_\pi = 2,6 \times 10^{-8}$  s et se désintègrent en muons. D'autre part, les muons se désintègrent en électrons et en neutrinos :

$$\begin{aligned}\pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + 34 \text{ MeV} & \tau_\pi &= 2,6 \times 10^{-8} \text{ s} \\ \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu + 105,2 \text{ MeV} & \tau_\mu &= 2,197 \times 10^{-6} \text{ s}\end{aligned}\quad (10.42)$$

(les mêmes processus, mais avec les antiparticules correspondantes, sont également possibles). La signification du *temps de vie* d'une particule instable est la suivante : étant donné un nombre  $N(0)$  de particules au temps  $t = 0$ , le nombre de particules au temps  $t$  est

$$N(t) = N(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (10.43)$$

On définit aussi la *demi-vie*  $T_{1/2}$  d'une particule instable comme le temps après lequel la moitié des particules se sont désintégrées. La demi-vie est proportionnelle au temps de vie, car

$$N(T_{1/2}) = \frac{1}{2} N(0) = N(0) \exp\left(-\frac{T_{1/2}}{\tau}\right) \implies T_{1/2} = \ln 2 \tau \approx 0,693 \tau \quad (10.44)$$

À première vue, il est difficile de comprendre pourquoi il y a tant de muons détectés au niveau de la mer, en comparaison de ce qu'on détecte à haute altitude. Supposons qu'on mesure le flux de muons au niveau de la mer et au sommet d'une montagne de 2 000 m d'altitude. Même en supposant que les muons se déplacent à la vitesse de la lumière (un maximum), la distance qu'ils pourraient parcourir en un temps de vie  $\tau_\mu$  serait  $c \tau_\mu \approx 659$  m. Le rapport entre le flux observé en altitude et au niveau de la mer serait

$$\frac{\text{flux à 2000 m}}{\text{flux au niveau de la mer}} = e^{-2000/660} = 0,048 \quad (10.45)$$

Or, le rapport mesuré des flux est plutôt de 0,7, ce qui correspond à un temps de vie dix fois plus long que le temps de vie mesuré sur des muons au repos (stoppés dans un cristal, par exemple). La raison de ce 'paradoxe' est la dilatation du temps. Le temps de vie du muon en mouvement est plus long parce que son horloge interne nous paraît ralentir par un facteur  $\gamma$ . On peut donc conclure de cette expérience que le muon moyen en provenance de la haute atmosphère à un  $\gamma$  moyen égal à 10 (en fait, les muons nous parviennent avec une certaine distribution statistique de vitesses).

On peut aussi considérer le même phénomène, cette fois du point de vue du muon, c'est-à-dire dans un référentiel se déplaçant avec le muon. Dans ce cas, le temps de vie du muon n'est pas affecté par la dilatation du temps, mais la distance à parcourir entre l'altitude de 2000m et le niveau de la mer est réduite par la contraction des longueurs, d'un facteur  $\gamma$ . En moyenne, cette distance est réduite de 2000m à 200m (le  $\gamma$  moyen est de 10). La plupart des muons ont donc le temps de franchir cette distance avant de se désintégrer.

### Exemple 10.2 Paradoxe des jumeaux

Ce paradoxe célèbre, formulé par P. Langevin, raconte l'histoire de deux jumeaux identiques, dont l'un décide de partir en voyage interplanétaire à bord d'un vaisseau spatial qui se déplace très vite. Appelons  $S$  le référentiel terrestre et  $S'$  le référentiel du voyageur. Du point de vue de son frère resté sur la Terre, le voyageur se déplace à une grande vitesse et son 'horloge interne' bat moins vite. Le voyageur semble donc vieillir moins vite. Après son séjour sur la planète X, le voyageur revient. Sa vitesse est toujours grande au retour, même si elle est dans la direction opposée. Encore une fois, il semble vieillir moins vite que son frère. À son retour, la différence d'âge doit être évidente (sans compter les horloges de bord qui ont retardé d'autant).

Le paradoxe vient de ce qu'on peut servir cet argument dans l'autre sens, du point de vue du voyageur dans le référentiel  $S'$ . De ce point de vue, la Terre se déplace à une grande vitesse (dans le sens opposé) et le temps s'écoule moins vite sur Terre. À première vue, c'est le jumeau resté sur la Terre qui devrait être plus jeune ! Lequel a raison ?

En réalité, c'est le voyageur qui est plus jeune. La raison en est que le référentiel  $S'$  n'est pas toujours un référentiel inertiel. Si le voyageur revient à son point de départ, c'est qu'il a dû subir une accélération à un moment donné et que les transformations de Lorentz ne sont pas applicables de manière immédiate en tout temps durant le trajet, mais seulement pendant les passages à vitesse constante. La Terre, contrairement au vaisseau spatial, a toujours été un référentiel inertiel (au moins en bonne approximation) ; donc le point de vue terrestre est plus valable.

La résolution de ce paradoxe nous enseigne quelque chose d'important : le voyageur qui revient à son point de départ est plus jeune parce qu'il a subi une accélération. Or, nous avons vu qu'il est impossible de distinguer localement

une accélération d'un champ gravitationnel. C'est donc qu'un champ gravitationnel produirait le même effet, s'il était suffisamment fort. C'est un phénomène prévu par la théorie de la *relativité générale* d'Einstein : le temps s'écoule moins vite dans un champ gravitationnel. Cet effet a même été mesuré (voir plus bas).

### 10.C.5 Transformation des vitesses

Voyons maintenant comment la vitesse d'une particule se transforme d'un référentiel à un autre. Il s'agit de procéder un peu comme nous l'avons fait dans l'éq. (2.63), cette fois avec une transformation différente. Dans un intervalle de temps  $dt'$ , la particule effectue un déplacement infinitésimal  $d\mathbf{r}'$  et la transformation de Lorentz s'applique à ces différentielles de temps et d'espace :

$$dx' = \gamma(dx - V dt) \quad , \quad dt' = \gamma(dt - V dx/c^2) \quad , \quad dy' = dy \quad , \quad dz' = dz \quad (10.46)$$

Les composantes de la vitesse  $\mathbf{v}'$  dans  $S'$  sont donc

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - V dt)}{\gamma(dt - V dx/c^2)} = \frac{dx/dt - V}{1 - (V/c^2)(dx/dt)} = \frac{v_x - V}{1 - V v_x/c^2} \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - V dx/c^2)} = \frac{1}{\gamma} \frac{dy/dt}{1 - (V/c^2)(dx/dt)} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - V v_x/c^2} \\ v'_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - V v_x/c^2} \end{aligned} \quad (10.47)$$

Ces transformations coïncident avec les transformations (2.63) dans la limite  $c \rightarrow \infty$ .

La transformation (10.47) nous permet de constater qu'une particule ne peut jamais aller plus vite que la lumière, autrement dit, que  $c$  est la *vitesse limite*.

**Exemple 1.** Un *collisionneur* est un type d'accélérateur de particules dans lequel deux faisceaux de particules de charges opposées se rencontrent face à face à des vitesses proches de la vitesse de la lumière. Supposons qu'un électron se dirige vers la gauche à une vitesse  $u$  et qu'il rencontre un positron se dirigeant vers la droite à la même vitesse. Quelle est la vitesse de l'électron par rapport au positron? Plaçons-nous dans le référentiel  $S'$  du positron et utilisons la relation (10.47) avec  $V = u$  et  $v_x = -u$  ( $\mathbf{v}$  est la vitesse de l'électron). Alors la vitesse de l'électron par rapport au positron est

$$v'_x = -\frac{2u}{1 + u^2/c^2} \quad |v'_x| < c \quad (10.48)$$

Par exemple, si  $u = 0,99c$ , alors  $|v'_x| = 0,99995c$ . Dans la limite  $u \rightarrow c$ , on trouve  $|v'_x| \rightarrow c$ .

**Exemple 2.** Revenons au cas de l'aberration des étoiles. Dans un référentiel  $S$ , un faisceau lumineux se dirige dans la direction  $\mathbf{e}_y$ . Sa vitesse est donc  $\mathbf{v} = c \mathbf{e}_y$ . Dans un référentiel  $S'$  se déplaçant par rapport au premier à une vitesse  $V \mathbf{e}_x$ , les composantes de la vitesse de ce faisceau lumineux sont

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= -V \\ v'_y &= \frac{c}{\gamma} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \mathbf{v}'^2 = (v'_x)^2 + (v'_y)^2 = V^2 + c^2(1 - V^2/c^2) = c^2 \quad (10.49)$$

Donc la grandeur de la vitesse du faisceau est encore  $c$  (évidemment, car c'est la condition qui a mené à la transformation de Lorentz) et la tangente de l'angle d'aberration est

$$\tan \alpha = \frac{v'_x}{v'_y} = -\frac{V}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \approx -\frac{V}{c} \quad (V \ll c) \quad (10.50)$$

(le signe de la tangente ne fait que refléter la direction de la vitesse  $\mathbf{V}$  et notre convention sur le signe des angles).

La rapidité  $\eta$  d'une particule de vitesse  $v$  est bien sûr définie comme  $v/c = \tanh \eta$ . Si  $\eta_R$  est la rapidité associée à la vitesse relative des deux référentiels et  $\eta'$  la rapidité de la particule dans  $S'$ , alors la transformation des vitesses dans le cas  $v_y = v_z = 0$  s'écrit

$$\eta' = \eta - \eta_R \quad (10.51)$$

Ceci provient de la loi d'addition des tangentes hyperboliques :

$$\tanh(a + b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} \quad (10.52)$$

## D Effet Doppler

### 10.D.1 Effet Doppler non relativiste : source en mouvement

Considérons une source d'impulsions (lumineuses ou sonores) se déplaçant à une vitesse  $v$  vers la droite et un observateur au repos, à droite de la source (voir figure). Supposons ici que l'onde se déplace dans un milieu (l'air, pour le son) à une vitesse  $w$  et que l'observateur est au repos par rapport à ce milieu. L'onde est émise par la source à une fréquence  $f_0$ . La fréquence  $f$  à laquelle les impulsions sont recueillies par l'observateur est différente :

$$f = \frac{f_0}{1 - v/w} \quad (10.53)$$

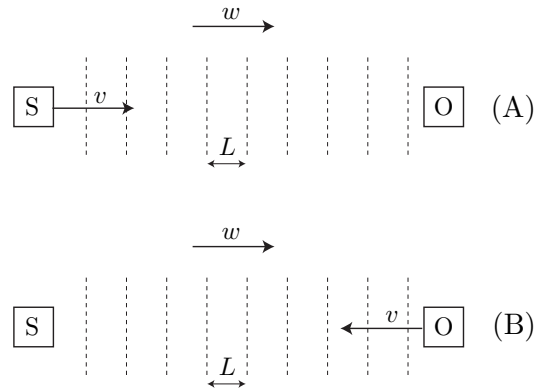
C'est l'*effet Doppler* pour une source en mouvement. Rappelons comment on démontre cette formule. La distance entre deux impulsions (ou deux fronts d'onde) dans le milieu est  $L = (w - v)T_0$ , où  $T_0$  est l'intervalle de temps entre l'émission de deux impulsions par la source. L'intervalle de temps entre deux réceptions par l'observateur est  $T = L/w$ . Comme  $f = 1/T$  et  $f_0 = 1/T_0$ , on trouve

$$f = \frac{1}{T} = \frac{w}{L} = \frac{w}{(w - v)T_0} = \frac{f_0}{1 - v/w} \quad (10.54)$$

Autrement dit, la fréquence du signal est plus élevée quand la source se dirige vers l'observateur et plus faible quand elle s'en éloigne.

**FIGURE 10.6**

Schéma de l'effet Doppler non relativiste. En (A), la source est en mouvement alors qu'en (B), c'est l'observateur qui est en mouvement. Dans les deux cas le milieu de propagation est au repos. Le signal se propage à la vitesse  $w$  vers la droite. Le signe de  $v$  est positif tel qu'illustré.





### 10.D.2 Effet Doppler non relativiste : observateur en mouvement

Considérons maintenant une source au repos par rapport au milieu de propagation du signal et un observateur qui se dirige vers la gauche à une vitesse  $v$ . La fréquence perçue par l'observateur est maintenant

$$f = f_0 \left( 1 + \frac{v}{w} \right) \quad (10.55)$$

Rappelons encore une fois la démonstration de cette formule : la distance  $L$  entre deux impulsions est  $L = w T_0$ , mais le temps  $T$  écoulé entre deux réceptions par l'observateur est tel que  $L = (w + v)T$ . Donc

$$f = \frac{1}{T} = \frac{w + v}{L} = \frac{w + v}{w T_0} = f_0 \left( 1 + \frac{v}{w} \right) \quad (10.56)$$

Encore une fois, la fréquence apparaît plus élevée à l'observateur qui s'approche de la source et moins élevée à celui qui s'en éloigne.

### 10.D.3 Effet Doppler relativiste

Les deux formules (10.53) et (10.55) sont différentes, ce qui signifie qu'on peut distinguer une source en mouvement d'un observateur en mouvement. La raison est qu'il existe un référentiel préférentiel, celui du milieu de propagation. Or, la théorie de la relativité part du principe qu'un tel référentiel (celui de l'éther) n'existe pas pour la lumière. Les formules (10.53) et (10.55) doivent donc être fausses pour la lumière se propageant dans le vide ! En fait, la formule relativiste correcte pour l'effet Doppler de la lumière dans le vide est

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (10.57)$$

cette formule coïncide avec la moyenne géométrique de (10.53) et (10.55) pour  $w = c$ . La démonstration est simple. On peut reprendre le raisonnement qui a mené à l'éq. (10.53), sauf que la période  $T_0$  doit être remplacée par la période mesurée dans le référentiel de l'observateur, c'est-à-dire  $T_0 \gamma > T_0$ , en raison de la dilatation du temps. Le résultat est donc

$$f = \frac{1}{T} = \frac{c}{L} = \frac{c}{(c - v)T_0 \gamma} = \frac{f_0}{1 - v/c} \sqrt{1 - v^2/c^2} = f_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (10.58)$$

On pourrait également reprendre le raisonnement qui a mené à la formule (10.55), sauf que la période  $T$  devrait être remplacée par la période telle que perçue par l'observateur en mouvement, soit  $T/\gamma$ , et on obtient alors

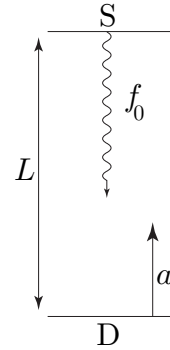
$$f = \frac{1}{T/\gamma} = \frac{c + v}{L/\gamma} = f_0 \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = f_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (10.59)$$

et donc le même résultat s'obtient que l'on considère la source en mouvement et l'observateur immobile, ou bien la source au repos et l'observateur en mouvement.

Remarquons que les formules (10.53), (10.55) et (10.57) sont en accord à l'ordre  $v/c$ , mais que des différences apparaissent à l'ordre  $(v/c)^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - v/c} &= 1 + \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots \\ 1 + v/c &= 1 + \frac{v}{c} \quad (\text{exact}) \\ \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} &= 1 + \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (10.60)$$

**FIGURE 10.7**  
Schéma de l'effet Doppler gravitationnel.



#### 10.D.4 Effet Doppler gravitationnel

L'effet Doppler et le principe d'équivalence peuvent nous aider à comprendre comment un champ gravitationnel peut affecter l'écoulement du temps. Considérons la figure ci-contre, qui représente une source S qui émet un signal lumineux de fréquence  $f_0$  vers un détecteur D situé à une distance  $L$  plus bas. On peut considérer que la source et le détecteur sont en repos relatif, dans le champ gravitationnel terrestre  $g$ . Selon le principe d'équivalence, cette situation est équivalente à celle d'un laboratoire situé dans un référentiel en accélération  $a = g$  vers le haut. Considérons donc cette dernière situation. Supposons que le signal lumineux est émis au temps  $t = 0$ . Soit S le référentiel (inertiel) du montage à ce moment-là. Comme le montage est accéléré, il n'est plus au repos par rapport à S l'instant d'après. Cependant, la vitesse du montage étant initialement zéro par rapport à S, elle n'a pas le temps de changer beaucoup pendant que le signal lumineux franchit la distance  $L$ , de sorte que le temps nécessaire pour franchir cette distance est approximativement  $t = L/c$  et la vitesse du montage (vers le haut) quand le détecteur reçoit le signal est  $v = at = aL/c$ . À ce moment-là, le signal lumineux est perçu à une fréquence différente (plus grande) en raison de l'effet Doppler. Au premier ordre en  $v/c$ , la fréquence détectée est

$$f = f_0 \left( 1 + \frac{v}{c} \right) = f_0 \left( 1 + \frac{aL}{c^2} \right) \quad (10.61)$$

Sur la Terre ( $a = g$ ), on doit donc observer une variation relative de fréquence

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \frac{gL}{c^2} \quad (10.62)$$

Cette variation est positive ( $\Delta f > 0$ ) si la source est située au-dessus du détecteur ( $L > 0$ ) et négative dans le cas contraire ( $L < 0$ ). Cette variation a été observée expérimentalement par Pound et Rebka (1959) et Pound et Snider (1965), en plaçant une source au sous-sol d'une tour de l'Université Harvard et en plaçant le détecteur au sommet de la tour (22,5m plus haut). La variation attendue alors est de

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{9,8 \cdot 22,5}{(3 \times 10^8)^2} = -2,5 \times 10^{-15} \quad (10.63)$$

Cette différence est minuscule, mais peut être détectée par effet Mössbauer (un effet de résonance de rayons gamma émis par des noyaux). Cette différence a été confirmée à 1% près, ce qui constitue une preuve convaincante de la validité du principe d'équivalence et, indirectement, de la théorie de la relativité générale d'Einstein. Plus généralement, l'effet démontre que le temps s'écoule plus lentement dans une région de plus petit potentiel gravitationnel : le photon perd de l'énergie – donc sa fréquence diminue – lorsqu'il se dirige vers une zone d'énergie potentielle gravitationnelle plus élevée.

Une discussion plus approfondie de l'effet Doppler gravitationnel ne peut se faire que dans le cadre de la théorie de la relativité générale. On montre alors que lorsqu'un photon se déplace dans le champ de gravita-

tion d'un objet sphérique de masse  $M$ , alors la combinaison suivante est constante :

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{2r_g}{r}}} = \text{cte} \quad r_g \equiv \frac{GM}{c^2} \quad (10.64)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde du photon et  $r_g$  est le *rayon gravitationnel* associé à la masse  $M$ . Pour la Terre, ce rayon est de 4,4 mm, donc extrêmement petit en comparaison de son rayon physique. Cette formule est plus exacte que la relation (10.62), et peut être utilisée lors de déplacements importants, par exemple lorsqu'on veut comparer la longueur d'onde d'un photon émis à la surface de la Terre à celle du même photon lorsqu'il est infiniment éloigné de la Terre. Remarquons qu'on retrouve le résultat (10.62) comme un cas limite des petits déplacements. En effet, en prenant la différentielle de la formule (10.64), on trouve

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \frac{2r_g}{r}}} - \frac{\lambda dr}{\left(1 - \frac{2r_g}{r}\right)^{3/2}} \frac{r_g}{r^2} = 0 \quad (10.65)$$

Après cette différentiation, on peut ensuite négliger le rapport  $r_g/r$  devant 1 et écrire

$$d\lambda - \lambda dr \frac{r_g}{r^2} = 0 \implies \frac{d\lambda}{\lambda} = dr \frac{r_g}{r^2} = dr \frac{GM}{c^2 r^2} \quad (10.66)$$

Si on se trouve à la surface de la Terre et qu'on considère un court trajet vertical de hauteur  $L$ , comme dans l'expérience de Pound et Rebka, alors on peut poser  $GM/r^2 = g$ ,  $dr = L$  et on obtient

$$\frac{d\lambda}{\lambda} \approx \frac{gL}{c^2} \quad (10.67)$$

Comme  $d\lambda/\lambda = -df/f$ , on retrouve bien le résultat (10.62).

## E Quadrivecteurs

La notion de vecteur en trois dimensions est utile parce qu'elle permet d'exprimer des quantités et des relations entre ces quantités sans choisir à chaque fois un système d'axes. Autrement dit, pour écrire la relation  $\mathbf{J} = m\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ , il n'est pas nécessaire de spécifier l'orientation des axes  $x, y, z$ , car cette relation est valable, quel que soit le choix des axes. Un même vecteur  $\mathbf{A}$  possède des composantes  $(A_x, A_y, A_z)$  différentes dans un système d'axes différent. Par exemple, si deux systèmes d'axes diffèrent par une rotation d'angle  $\theta$  dans le plan  $xy$ , alors la relation entre les composantes de  $\mathbf{A}$  dans les deux systèmes est donnée par l'éq. (2.53).

En relativité, la notion de vecteur peut être avantageusement étendue à des quantités comportant quatre composantes et se transformant de la même manière que les coordonnées d'espace-temps quand on passe d'un référentiel à l'autre. Plus précisément, un *quadrivecteur* est une quantité représentée par quatre composantes  $(A^0, A^1, A^2, A^3)$ . La composante  $A^0$  est appelée *composante temporelle*, alors que les trois autres sont les *composantes spatiales*. La valeur précise de ces composantes dépend du référentiel. Lorsqu'on passe d'un référentiel  $S$  à un référentiel  $S'$  se déplaçant à une vitesse  $V\mathbf{e}_x$  par rapport à  $S$ , les composantes se transforment de la manière suivante :

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1) \quad A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0) \quad A'^2 = A^2 \quad A'^3 = A^3 \quad (10.68)$$

où  $\beta = V/c$  et  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . En fait, un ensemble de quatre quantités  $A^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) doit se transformer de cette manière pour mériter le nom de quadrivecteur. Les trois composantes spatiales sont parfois regroupées

en un vecteur tridimensionnel dans la notation, de sorte qu'on écrit souvent un quadrivecteur comme  $(A^0, \mathbf{A})$ . Dans ces notes, nous allons utiliser une police de caractères linéale pour désigner un quadrivecteur par un seul symbole, par exemple  $A$ .

L'exemple fondamental de quadrivecteur est la 'position', dans l'espace-temps, d'un événement :

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \quad (10.69)$$

ou encore  $x = (ct, \mathbf{r})$ . La transformation (10.68) dans ce cas coïncide avec la transformation de Lorentz (10.20). Notez que le temps a été multiplié par  $c$  dans la composante temporelle, de sorte que les quatre composantes du quadrivecteur ont les mêmes unités.

### 10.E.1 Invariants

Un *invariant* est une quantité qui a exactement la même forme dans tous les référentiels. Étant donné un quadrivecteur  $A^\mu$ , on montre facilement que la quantité  $(A^0)^2 - \mathbf{A}^2$  est un invariant. En fait, étant donnés deux quadrivecteurs quelconques  $A$  et  $B$ , la quantité

$$A \cdot B \equiv A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (10.70)$$

est un invariant. Explicitement, ceci signifie que

$$A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A'^0 B'^0 - \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' \quad (10.71)$$

où les primes réfèrent aux composantes du quadrivecteur dans le référentiel  $S'$ . Pour le démontrer, il suffit d'utiliser la transformation de Lorentz (10.68) :

$$\begin{aligned} A'^0 B'^0 - \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' &= \gamma^2 (A^0 - \beta A^1)(B^0 - \beta B^1) \\ &\quad - \gamma^2 (A^1 - \beta A^0)(B^1 - \beta B^0) - A^2 B^2 - A^3 B^3 \\ &= A^0 B^0 \gamma^2 (1 - \beta^2) - A^1 B^1 \gamma^2 (1 - \beta^2) - A^2 B^2 - A^3 B^3 \\ &= A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (10.72)$$

car  $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$ .

L'exemple le plus simple d'invariant est obtenu à partir du quadrivecteur position :

$$x \cdot x = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 \quad (10.73)$$

Il s'agit de l'intervalle discuté précédemment.

### 10.E.2 Temps propre

Considérons un objet qui se déplace dans l'espace-temps, comme une particule ou un voyageur sidéral. Dans l'espace-temps, le mouvement de ce point trace une certaine trajectoire, correspondant à une suite continue d'événements successifs. On définit le *temps propre* de cet objet comme le temps tel qu'il s'écoule dans le référentiel propre à cet objet. On note le temps propre  $\tau$ .

Si un objet se déplace à une vitesse constante  $v$  par rapport au référentiel  $S$ , alors son temps propre est simplement relié au temps  $t$  du référentiel par la formule de dilatation du temps :  $\tau = t \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Par exemple, l'horloge en mouvement par rapport à  $S$  a une période  $T_0$  en fonction de son temps propre, mais une période  $T$  telle que mesurée dans le référentiel  $S$ , avec la relation  $T_0 = T \sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Si un objet ne se déplace pas à une vitesse constante, le calcul de son temps propre en fonction du temps  $t$  est plus compliqué. On peut cependant affirmer que la différentielle de temps propre  $d\tau$  associée à une différentielle de temps  $dt$  est

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (10.74)$$

où  $v$  est la vitesse de l'objet à ce moment-là ( $v$  dépend du temps). Le temps propre écoulé depuis l'instant  $t = 0$  est donc

$$\tau = \int_0^t dt_1 \sqrt{1 - v(t_1)^2/c^2} \quad (10.75)$$

Le temps propre d'un objet est un invariant, puisque sa définition, dans tout référentiel, nous ramène nécessairement au référentiel propre à l'objet.

### 10.E.3 Quadri vitesse

Un autre quadri vecteur qu'il est possible de construire sur la trajectoire d'un objet est la *quadri vitesse*, définie par

$$u = \frac{dx}{d\tau} = (c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}) \quad (10.76)$$

Comme

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.77)$$

les composantes de la quadri vitesse sont donc

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, v_x, v_y, v_z) \quad (10.78)$$

La quadri vitesse est un quadri vecteur, parce qu'elle est le quotient d'un quadri vecteur ( $dx$ ), par un invariant ( $d\tau$ ). Donc, les composantes de la vitesse se transforment d'un référentiel à l'autre par la transformation de Lorentz (10.68). Avec la quadri vitesse on construit l'invariant suivant :

$$u \cdot u = \frac{1}{1 - v^2/c^2} (c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2 \quad (10.79)$$

Il se trouve que cet invariant est trivial : il ne fait que réitérer l'invariance de la vitesse de la lumière.

Il est possible de retrouver la formule de transformation des vitesses (10.47) en appliquant la transformation de Lorentz (10.68) au quadri vecteur vitesse. En effet, soit  $(u^0, u^1, 0, 0)$  les composantes de la quadri vitesse dans un référentiel  $S$ , et  $(u'^0, u'^1, 0, 0)$  les composantes de la même quadri vitesse dans un référentiel  $S'$  (la particule se déplace dans la direction  $x$ ). Comme plusieurs vitesses interviennent dans les manipulations suivantes, on introduit la notation suivante :

$$\beta_V = \frac{V}{c} \quad \gamma_V = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_V^2}} \quad (10.80)$$

et pareillement pour  $\gamma_v$ . Selon les règles de transformation (10.68), on trouve

$$u'^0 = \gamma_V (u^0 - \beta_V u^1) \quad u'^1 = \gamma_V (u^1 - \beta_V u^0) \quad (10.81)$$

Comme  $u^0 = c\gamma_v$  et  $u^1 = v\gamma_v$ , ceci devient

$$u'^0 = c\gamma_v\gamma_V(1 - \beta_V\beta_v) \quad u'^1 = \gamma_v\gamma_V(v - V) \quad (10.82)$$

et donc la vitesse de la particule dans le référentiel  $S'$  est

$$v' = c \frac{u'^1}{u'^0} = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}} \quad (10.83)$$

ce qui coïncide bien avec la première des équations (10.47). La transformation des autres composantes se trouve de manière semblable.

## F Quantité de mouvement et énergie

Nous avons vu que la loi de Newton  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  est invariante par transformation de Galilée. Or, puisque la transformation de Galilée a été remplacée par la transformation de Lorentz, il faut également modifier la loi de Newton si on désire qu'elle demeure valable dans tous les référentiels inertiels. En fait, nous écrivons toujours la loi de Newton comme  $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ . C'est la définition de la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  qui va changer.

On sait que, lors d'une collision élastique, la quantité de mouvement et l'énergie sont conservées. Nous allons voir que ceci est impossible dans le cadre de la théorie de la relativité si on garde les définitions  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  et  $K = \frac{1}{2}mv^2$ , et qu'il faut plutôt utiliser les expressions suivantes :

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.84)$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.85)$$

où  $K = E - mc^2$ .

Pour démontrer l'incompatibilité de la formule  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  avec la relativité, considérons le processus de collision illustré à la Fig. 10.8. Deux particules identiques entrent en collision à la même vitesse  $v$ , à un angle de  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale, dans le référentiel  $S$ , et émergent de cette collision toujours avec le même angle. L'impulsion totale des deux particules est nulle, car  $S$  est le référentiel du centre de masse du système. Déplaçons-nous maintenant dans un référentiel  $S'$  se déplaçant à une vitesse  $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$  par rapport à  $S$ . Calculons la composante verticale de l'impulsion totale avant et après la collision dans  $S'$ , à l'aide de la relation (10.47) :

$$\begin{aligned} P_y^{\text{tot.}} &= \frac{1}{\gamma} \frac{mv_y}{1 - v_x V/c^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{mv_y}{1 + v_x V/c^2} & (\text{avant}) \\ P_y^{\text{tot.}} &= -\frac{1}{\gamma} \frac{mv_y}{1 - v_x V/c^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{mv_y}{1 + v_x V/c^2} & (\text{après}) \end{aligned} \quad (10.86)$$

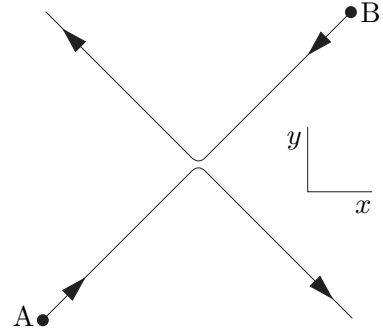
On constate que ces deux quantités sont différentes : la quantité de mouvement n'est plus conservée dans  $S'$ .

La modification qu'on doit apporter est de remplacer

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{par} \quad \mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \quad (10.87)$$

où  $\tau$  est le temps propre de la particule, c'est-à-dire le temps tel qu'il s'écoule dans le référentiel de la particule. Ceci équivaut à la relation (10.84), car  $d\tau/dt = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

**FIGURE 10.8**  
Collision de deux particules à  $45^\circ$  dans le référentiel  $S$ .



### 10.F.1 Quadrivecteur impulsion

En fait, on doit considérer le quadrivecteur impulsion défini par

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \left( \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (10.88)$$

Les composantes spatiales de ce quadrivecteur forment la quantité de mouvement relativiste. Quant à la composante temporelle, elle est égale à  $p^0 = E/c$ , où  $E$  est défini par l'expression (10.85). Montrons la pertinence de cette expression en étudiant sa limite non relativiste : dans l'approximation  $v/c \ll 1$ , on a le développement de Taylor

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (10.89)$$

Donc, modulo la constante  $mc^2$ ,  $E = p^0 c$  est l'énergie cinétique de la particule. En fait, on définit l'énergie *cinétique* relativiste comme la différence entre  $E$  et la constante  $mc^2$  :

$$K = E - mc^2 = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (10.90)$$

L'énergie cinétique n'est non nulle que si la vitesse de la particule est non nulle et elle coïncide avec l'expression  $\frac{1}{2}mv^2$  quand la vitesse  $v$  est petite par rapport à  $c$ .

La raison qui nous force à utiliser les formes (10.84) et (10.85) de l'impulsion et de l'énergie est que la conservation de ces quantités est maintenant valable dans tous les référentiels. Considérons un processus de collision élastique dans lequel deux particules ont respectivement des quadrivecteurs impulsion  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  avant la collision et des quadrivecteurs impulsion  $\mathbf{p}_3$  et  $\mathbf{p}_4$  après la collision. La conservation de l'énergie et de l'impulsion s'écrit

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 = 0 \quad (10.91)$$

Le membre de gauche de cette équation est un quadrivecteur. Si toutes ses composantes sont nulles dans un référentiel, elles seront aussi nulles dans tout autre référentiel inertiel, en raison de la transformation de Lorentz (10.68). Autrement dit, si l'énergie et l'impulsion sont conservées dans un référentiel, elles seront aussi conservées dans tout autre référentiel. C'est le résultat recherché.

En substituant dans la transformation (10.68) la forme  $\mathbf{p} = (E/c, \mathbf{p})$ , on voit que les composantes de l'impulsion et l'énergie  $E$  se transforment donc ainsi quand on passe du référentiel  $S$  au référentiel  $S'$  :

$$\boxed{\begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - VE/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & E' &= \frac{E - Vp_x}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ p'_y &= p_y & p'_z &= p_z \end{aligned}} \quad (10.92)$$

Notons la relation suivante entre l'énergie et l'impulsion :

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (10.93)$$

Cette relation provient de l'invariant

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = m^2 c^2 \quad (10.94)$$

## 10.F.2 Travail et énergie

L'expression (10.85) de l'énergie a été justifiée ci-haut en montrant que cette quantité est conservée dans tous les référentiels lors de collisions élastiques. Donnons maintenant un argument complémentaire, basé sur la relation présumée entre travail et énergie. Le théorème travail-énergie affirme que le travail, défini comme l'intégrale définie

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.95)$$

le long d'une trajectoire  $C$ , est la différence d'énergie cinétique entre la fin et le début du parcours, si  $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$  le long de ce parcours. Calculons cette intégrale, sans référence à une trajectoire précise, à l'aide de l'expression (10.84) de la quantité de mouvement, en supposant que  $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$  :

$$\begin{aligned} W &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \int d\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \int d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - m \int \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{1}{2}m \int \frac{dv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (10.96)$$

Donc le travail est

$$W = E_f - E_i \quad \text{où} \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.97)$$

Ceci confirme l'expression (10.85) de l'énergie d'une particule.

## 10.F.3 Force et accélération

La relation entre la force appliquée et la quantité de mouvement est

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.98)$$

C'est cette relation qui remplace  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  dans la dynamique relativiste.

Si on calcule explicitement la dérivée temporelle dans (10.98), on trouve

$$\mathbf{F} = \frac{m\mathbf{a}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m\mathbf{v}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \quad (10.99)$$



Dans le cas où la vitesse est parallèle à l'accélération,  $\mathbf{v}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{a}v^2$  et on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{m\mathbf{a}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left\{ 1 + \frac{v^2/c^2}{(1-v^2/c^2)} \right\} \\ &= m\mathbf{a}\gamma^3 \quad (\mathbf{a} \parallel \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (10.100)$$

Par contre, si la vitesse est perpendiculaire à l'accélération, alors  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$  et on obtient

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}\gamma \quad (\mathbf{a} \perp \mathbf{v}) \quad (10.101)$$

Les facteurs  $\gamma$  et  $\gamma^3$  font qu'il est beaucoup plus difficile d'accélérer un objet (avec une force donnée) quand sa vitesse s'approche de  $c$ . On apprend ici que ceci est encore plus vrai si  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{v}$  que si  $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$ .

### Exemple 10.3 Fréquence cyclotron relativiste

Considérons comme exemple le mouvement d'une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . En relativité, la force magnétique est encore donnée par la formule  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ . Donc, la dérivée  $d\mathbf{p}/dt$  est perpendiculaire à  $\mathbf{v}$ , c'est-à-dire à  $\mathbf{p}$ , et sa grandeur  $|\mathbf{p}|$  est donc constante, ainsi que la grandeur de  $\mathbf{v}$ . Donc l'accélération est toujours perpendiculaire à la vitesse et la particule a une trajectoire en hélice, comme dans le cas non relativiste. Cependant, la fréquence  $\omega_c$  de ce mouvement en hélice n'est plus donnée par  $qB/m$ . En effet,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}\gamma = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (10.102)$$

Étant donné que  $\gamma$  est constant (car  $v$  est constant), on peut le regrouper avec la masse  $m$  quand on résout l'équation différentielle et on obtient une fréquence cyclotron qui dépend maintenant de la vitesse :

$$\omega_c = \frac{qB}{m\gamma} = \frac{qB}{m} \sqrt{1-v^2/c^2} \quad (10.103)$$

C'est en raison de cette dépendance en vitesse que le schéma simplifié du cyclotron ne fonctionne plus quand la vitesse de la particule se rapproche trop de  $c$ . Notons cependant la relation entre le rayon  $R$  de la trajectoire et l'impulsion :

$$R = v/\omega_c = \frac{mv\gamma}{qB} = \frac{|\mathbf{p}|}{qB} \quad (10.104)$$

La mesure de ce rayon, dans un détecteur de particules sous champ magnétique, permet de mesurer directement l'impulsion  $|\mathbf{p}|$ , et donc la vitesse et l'énergie

## 10.F.4 Particules de masse nulle et effet Doppler

La relation (10.93) nous permet d'envisager des particules de masse nulle, pour lesquelles la relation entre l'énergie et l'impulsion est

$$E = |\mathbf{p}|c \quad (\text{masse nulle}) \quad (10.105)$$

Ces particules se déplacent nécessairement à la vitesse de la lumière, sinon la relation (10.85) leur donne une énergie nulle. Les particules élémentaires suivantes sont considérées de masse nulle :

1. Le photon, dont le symbole est  $\gamma$  (pour *rayon gamma*). On montre que la masse nulle du photon est étroitement liée à la décroissance en  $1/r^2$  de la force électrique. Des expériences électromagnétiques ont placé une borne supérieure à la masse du photon :  $m_\gamma < 4 \times 10^{-48} \text{g}$ , soit  $10^{-15}$  fois la masse de l'électron.
2. Les trois espèces de neutrinos :  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ . La borne supérieure est moins minuscule que pour le photon :  $m < 15 \text{ eV}$  pour le  $\nu_e$ ,  $m < 0,17 \text{ MeV}$  pour le  $\nu_\mu$  et  $m < 24 \text{ MeV}$  pour le  $\nu_\tau$ . Des observations récentes portent à penser que leurs masses, quoique très petites, ne sont pas exactement nulles.

3. Le graviton, la particule associée à la force de gravité, comme le photon est associé à la force électromagnétique. Le graviton n'a jamais été détecté en tant que particule, parce que l'interaction gravitationnelle est beaucoup trop faible pour manifester des effets quantiques. Cependant, des théories prévoient son existence et sa masse devrait être nulle.

Le photon est la particule quantique associée à la lumière. À une onde lumineuse de fréquence  $f$ , on associe un photon (ou un ensemble de photons) d'énergie  $E = hf = \hbar\omega$  ( $\omega = 2\pi f$ ). Si le vecteur d'onde de l'onde est  $\mathbf{k}$ , alors l'impulsion du photon est  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . On peut donc transformer la fréquence et le vecteur d'onde d'un référentiel à un autre en utilisant la transformation (10.92) pour le quadrivecteur impulsion :

$$\begin{aligned} k'_x &= \frac{k_x - V\omega/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & \omega' &= \frac{\omega - Vk_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ k'_y &= k_y & k'_z &= k_z \end{aligned} \quad (10.106)$$

N'oublions pas, en utilisant cette relation, la contrainte que  $ck = \omega$ , où  $k = |\mathbf{k}|$ .

Supposons que l'onde se propage dans la direction  $x$ , qui est aussi la direction de la vitesse relative des deux référentiels :  $k_x = \pm k = \pm\omega/c$ ,  $k_y = k_z = 0$ . On trouve alors

$$\omega' = \omega \frac{1 \mp V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \omega \sqrt{\frac{1 \mp V/c}{1 \pm V/c}} \quad (10.107)$$

Ceci coïncide avec la formule (10.57) : si la source est au repos dans  $S$  et que l'observateur est dans  $S'$ , alors elle s'approche de l'observateur si  $k_x = -k$  (signe inférieur) et s'éloigne de l'observateur si  $k_x = +k$  (signe supérieur).

### 10.F.5 Collisions relativistes et équivalence masse-énergie

Tant et aussi longtemps qu'on ne considère que des problèmes de dynamique simples (force agissant sur une particule) ou des collisions élastiques, l'énergie au repos d'une particule ( $E = mc^2$ ) n'est d'aucune conséquence. On peut à juste titre la considérer comme une simple constante d'intégration.

Einstein a eu l'intuition de considérer ce terme comme une véritable énergie physique, c'est-à-dire susceptible de se transformer en d'autres formes. Autrement dit, la masse, ou l'inertie sont une forme d'énergie qui peut, lors de processus de collision inélastiques, se transformer en énergie cinétique ou vice-versa. Dans ce contexte, une collision inélastique est un processus où les particules sont altérées lors de la collision, c'est-à-dire une véritable *réaction*, où les produits diffèrent des réactants.

L'analyse des processus de collision est grandement simplifiée lorsqu'on les étudie dans le référentiel du *centre d'impulsion*, le référentiel où la quantité de mouvement totale des particules est nulle. Dans ce référentiel, toute l'énergie cinétique des réactants est disponible pour être convertie en masse. Si  $\mathbf{P} = P_x \mathbf{e}_x$  désigne la quantité de mouvement totale des réactants dans un référentiel donné, et  $E$  l'énergie totale correspondante (incluant l'énergie de masse), alors le référentiel du centre d'impulsion,  $S'$ , se déplace à une vitesse  $\mathbf{V} = V \mathbf{e}_x = \beta c \mathbf{e}_x$  par rapport au référentiel de départ, et la composante en  $x$  de l'impulsion totale dans ce référentiel est, d'après la transformation de Lorentz,

$$P'_x = \gamma(P_x - \beta E/c) = 0 \implies \beta = \frac{cP_x}{E} \quad (10.108)$$

et donc l'énergie  $E'$  dans ce référentiel est

$$E' = \gamma(E - c\beta P_x) = \gamma E(1 - \beta^2) = E \sqrt{1 - V^2/c^2} \quad (10.109)$$

ou encore :

$$E = \frac{E'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (10.110)$$

Il s'agit ici d'une version relativiste du théorème de König, où  $E'$  est l'énergie interne du système, c'est-à-dire l'énergie du système dans le référentiel où la quantité de mouvement est nulle.

Une formulation équivalente de cette relation, encore plus simple, relie l'énergie  $E$  et l'impulsion  $\mathbf{P}$  du système à l'énergie interne  $E'$  en utilisant la propriété d'invariance de la combinaison  $E^2 - P^2 c^2$ . Dans le référentiel du centre d'impulsion, cette quantité devient simplement  $E'^2$ , car  $P' = 0$  dans ce cas. On peut donc écrire

$$E^2 - P^2 c^2 = E'^2 \quad \text{ou} \quad E = \sqrt{E'^2 + P^2 c^2} \quad (10.111)$$

En mécanique non relativiste, l'énergie interne n'est pas conservée lors d'une collision inélastique. On devrait plutôt dire qu'elle peut se convertir en chaleur ou en énergie potentielle. Le point de vue relativiste est différent : l'énergie interne est toujours conservée, même lors de processus inélastiques, mais sa forme précise peut changer : elle peut être en partie cinétique, potentielle, inertielle, etc. (on ne fait pas toujours la distinction entre ces différentes formes). L'important est que les produits d'une collision inélastique n'ont pas nécessairement les mêmes masses que les réactants. L'énergie cinétique interne peut se convertir en masse et vice-versa. La loi de conservation de la masse énoncée par Lavoisier, ne tient plus ; elle fait dorénavant partie de la loi de conservation de l'énergie.

#### Exemple 10.4 Processus de collision inélastique

Par exemple, considérons une particule de masse  $m$  et d'énergie  $\varepsilon$  qui entre en collision avec une autre particule de même masse, initialement au repos. Cherchons quelle doit être la valeur minimale de  $\varepsilon$  pour que la collision puisse entraîner la création d'une paire particule-antiparticule de masses  $m'$ , sans que les deux particules initiales soient annihilées.

La manière la plus simple de résoudre ce problème est d'utiliser le concept de *masse invariante*. La masse invariante  $M$  d'un système de  $N$  particules dont les quadrivecteurs impulsion sont notés  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N$  est définie par l'invariant

$$M^2 c^2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N) \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N) \quad (10.112)$$

Si, par exemple, ces  $N$  particules sont le fruit de la désintégration d'une seule particule initiale, alors le quadrivecteur impulsion de cette particule initiale est précisément la somme  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N$  (par conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement) et alors la masse invariante est précisément la masse de cette particule, en vertu de la relation (10.94) :  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = M^2 c^2$ . La masse invariante permet précisément d'identifier, à l'aide des énergies et impulsions des produits d'une désintégration, la masse de la particule instable, indépendamment du référentiel utilisé.

Dans le cas qui nous occupe, nous avons un processus de création de paire de particules respectant la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement :

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_6 \quad (10.113)$$

où les quadrivecteurs impulsions associés aux deux particules initiales (la cible et le projectile avant la collision) apparaissent à gauche, et les quadrivecteurs impulsions associés aux quatre particules finales (la cible et le projectile après la collision et la nouvelle paire de particules) apparaissent à droite. Évaluons la masse invariante associée à chaque membre de cette égalité. Plaçons-nous dans le référentiel du laboratoire pour évaluer  $(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ . Dans ce référentiel,  $\mathbf{p}_1 = (\varepsilon/c, \mathbf{p})$  (le projectile a une quantité de mouvement  $\mathbf{p}$ ) et  $\mathbf{p}_2 = (mc, 0)$  (la cible est au repos). Donc

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) &= (\varepsilon/c + mc)^2 - p^2 = \varepsilon^2/c^2 + 2m\varepsilon + m^2 c^2 - p^2 \\ &= 2m\varepsilon + 2m^2 c^2 = 2m(\varepsilon + mc^2) \end{aligned} \quad (10.114)$$

Plaçons-nous ensuite dans le référentiel du centre d'impulsion pour évaluer la masse invariante associée à  $\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_6$  et supposons en outre que nous sommes au seuil de la réaction, c'est-à-dire que l'énergie du projectile est tout juste suffisante pour créer la paire, sans qu'aucune énergie cinétique ne soit donnée à aucune des quatre particules. Dans ce cas,  $\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4 = (mc, 0)$  et  $\mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_6 = (m'c, 0)$ . Donc la masse invariante  $M$  est telle que

$$M^2 c^2 = (2mc + 2m'c, 0) \cdot (2mc + 2m'c, 0) = 4(m + m')^2 c^2 \quad (10.115)$$

et doit être identique à celle calculée dans le référentiel du laboratoire, soit

$$2m(\varepsilon + mc^2) = 4(m + m')^2 c^2 \implies \varepsilon = 2 \left( 1 + \frac{m'}{m} \right)^2 mc^2 - mc^2 \quad (10.116)$$

Cette valeur de  $\varepsilon$  est donc l'énergie de seuil du projectile dans le référentiel du laboratoire. On note qu'elle croît comme le carré de l'énergie de repos des nouvelles particules créées, ce qui implique que la combinaison cible + projectile n'est pas la plus économique pour produire des particules nouvelles : il est plus sage de se placer d'emblée dans le référentiel du centre d'impulsion et d'utiliser un collisionneur, c'est-à-dire un système où deux projectiles de quantités de mouvement égales et opposées sont lancés l'un contre l'autre.

Notons que dans le cas particulier où  $m' = m$ , la formule ci-dessus pour l'énergie de seuil se réduit à

$$\varepsilon = 7mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (10.117)$$

ce qui correspond à une vitesse de

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 7^2} = 0,990 \quad (10.118)$$

## G Problèmes

### Problème 10.1

Après le paradoxe des jumeaux, voici celui du sauteur à la perche et de la grange. Un sauteur à la perche court à une vitesse  $v$  proche de celle de la lumière en tenant sa perche de longueur  $L$  bien horizontale. Il entre dans une grange ouverte aux deux bouts, elle aussi de longueur  $L$ . Le fermier qui l'observe se dit : « puisque la perche est contractée d'un facteur  $\sqrt{1-v^2/c^2}$  en raison de sa vitesse, elle va pouvoir entrer tout entière dans la grange à un moment donné ». Le coureur, au contraire, se dit : « La grange se dirige vers moi à une vitesse  $v$  ; elle est donc contractée d'un facteur  $\sqrt{1-v^2/c^2}$  et la perche ne pourra entrer tout entière dans la grange à aucun moment ». Lequel des deux a raison ? Expliquez.

### Problème 10.2

Démontrez que l'application successive de deux transformations de Lorentz de rapidités  $\eta_1$  et  $\eta_2$  (dans la même direction) est équivalente à une transformation de Lorentz de rapidité  $\eta_3 = \eta_1 + \eta_2$ .

### Problème 10.3

Un faisceau lumineux est émis avec un angle  $\theta_0$  par rapport à l'axe des  $x'$  dans le référentiel  $S'$  qui se déplace à une vitesse  $v\mathbf{e}_x$  par rapport au référentiel  $S$ . Montrez que l'angle  $\theta$  du faisceau par rapport à l'axe des  $x$  dans  $S$  est donné par

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta_0 + \beta}{1 + \beta \cos \theta_0} \quad (\beta \equiv v/c)$$

### Problème 10.4

Considérons une source lumineuse qui, lors d'une brève explosion, émet de manière isotrope, c'est-à-dire qu'une quantité égale de lumière est émise dans toutes les directions, dans le référentiel de la source. Supposons maintenant qu'on observe cette source à partir d'un référentiel se déplaçant à une vitesse  $v$  vers la gauche par rapport à la source (la source se déplace donc à une vitesse  $v\mathbf{e}_x$  vers la droite par rapport au référentiel de l'observateur). Soit  $\theta$  l'angle entre une direction dans l'espace et l'axe des  $x$ .

**A** Trouvez la proportion de lumière émise (du point de vue de l'observateur) entre l'angle  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ . Note : chaque angle  $\theta$  définit un certain cône et cette question réfère donc à la lumière émise entre deux cônes.

**B** À quelle vitesse doit se déplacer la source pour que la moitié de la lumière soit émise dans un cône sous-tendant un angle de  $10^{-3}$  radians ? Cet effet est observé dans les accélérateurs de particules : le rayonnement émis par une particule accélérée est fortement confiné à un cône étroit dans la direction de la vitesse de la particule, comme si elle était munie de « phares »...

### Problème 10.5

En 1851, Fizeau procéda à l'expérience suivante : il fit passer de l'eau dans un tuyau transparent (disons, de gauche à droite) à une vitesse  $v$ . En même temps, il mesura la vitesse de la lumière en la faisant passer dans l'eau en mouvement (aussi de gauche à droite), le long du tuyau. Dans le référentiel où l'eau est au repos, la lumière a une vitesse  $c/n$  ( $n$  est l'indice de réfraction de l'eau). Démontrez qu'au premier ordre en  $v/c$ , la vitesse  $u$  du faisceau lumineux telle que mesurée dans le laboratoire est

$$u = \frac{c}{n} + v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

En quoi cela diffère-t-il du résultat auquel Fizeau était en droit de s'attendre à son époque?

### Problème 10.6

Une personne désire se rendre sur alpha du centaure (à 4,3 années-lumière du système solaire) et veut que le voyage dure exactement un an (en première classe).

**A** À quelle vitesse le vaisseau spatial doit-il voyager par rapport à la Terre pour que ce soit possible? Supposons qu'on puisse négliger les périodes d'accélération initiale et de décélération finale du vaisseau.

**B** Après quelques jours sur alpha du centaure (plus précisément, sur une planète appartenant à ce système), cette même personne doit retourner sur Terre, dans les mêmes conditions de voyage qu'à l'aller. À son retour sur Terre, cette personne pourrait croire avoir été absente 2 ans. En réalité, combien d'années terrestres se sont écoulées depuis son départ?

### Problème 10.7

Un référentiel  $S'$  se déplace par rapport au référentiel  $S$  à une vitesse  $V\mathbf{e}_x$ . Une particule dans  $S'$  a une vitesse nulle et une accélération  $a'$  dans la direction  $\mathbf{e}_x$ . Montrez que son accélération telle que mesurée dans le référentiel  $S$  est

$$a = a' \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{3/2}$$

Indice : utilisez la formule de transformation des vitesses, prenez-en la différentielle et divisez par la différentielle  $dt$  pour calculer l'accélération, comme ce qui a été fait pour obtenir la transformation des vitesses.

### Problème 10.8

Un voyageur quitte la Terre (le référentiel  $S$ ) à  $t = 0$ , à bord d'un vaisseau spatial accéléré uniformément par rapport à son propre référentiel instantané. Autrement dit, à un temps  $t$ , on peut considérer un référentiel inertiel  $S'$  dont la vitesse par rapport à  $S$  (appelons-la  $v(t)$ ) est celle du vaisseau. Par rapport à ce référentiel  $S'$ , le vaisseau a une vitesse nulle à ce moment-là et une accélération  $g$ . L'instant d'après, il faut considérer un référentiel  $S'$  dont la vitesse est  $v(t + dt)$  par rapport à  $S$ ; dans ce nouveau référentiel, l'accélération du vaisseau est encore  $g$ , etc.

**A** Montrez que la vitesse  $v$  du vaisseau par rapport à  $S$ , en fonction du temps, est

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + (gt/c)^2}}$$

( $t$  est le temps tel qu'il s'écoule sur la Terre). Indice : utilisez le résultat du problème 10.7, en reliant la différentielle  $dt$  à la différentielle de vitesse  $dv$ . Utilisez les bonnes conditions initiales.

**B** Recommencez la partie **A**, cette fois en utilisant comme paramètre non pas le temps  $t$  tel qu'il s'écoule dans  $S$ , mais le temps  $\tau$  tel qu'il s'écoule dans le vaisseau (le temps propre). Montrez que

$$v(\tau) = c \tanh\left(\frac{g\tau}{c}\right)$$

**C** Montrez que la distance parcourue en fonction du temps propre écoulé est

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g} (\cosh(g\tau/c) - 1)$$

**D** Supposons que, dans le but de parcourir une distance  $D$  au total, en un temps propre total  $T$ , le vaisseau change le signe de son accélération à mi-course pour arriver à destination avec une vitesse nulle (par rapport à  $S$ ). Reliez  $D$  à  $T$  et trouvez la valeur numérique de  $T$  associé à un voyage vers (1) alpha du Centaure [4,3 a.l.] et (2) la galaxie d'Andromède [2,6 millions d'a.l.].

### Problème 10.9

L'une des raies spectrales les plus intenses de l'hydrogène est notée  $H_\alpha$  et sa longueur d'onde est 656,1 nm. On peut détecter cette raie dans la lumière solaire. Si on se concentre sur des points situés sur l'équateur solaire, aux extrémités gauche et droite du disque solaire, on trouve une différence de longueur d'onde de  $9 \times 10^{-12}$  m. En supposant que cette différence est causée par l'effet Doppler, estimez la période de rotation du Soleil sur lui-même. Le diamètre du Soleil est  $1,4 \times 10^9$  m.

### Problème 10.10

La navette spatiale est en orbite circulaire de rayon  $r = R_\oplus + h$  ( $R_\oplus$  est le rayon de la Terre et  $h$  l'altitude de l'orbite). L'altitude de l'orbite est petite en comparaison de  $R_\oplus$  (quelques pourcents).

**A** En fonction de  $r$ ,  $M_\oplus$ ,  $G$  et  $c^2$ , exprimez le retard relatif d'une horloge extrêmement précise portée par la navette sur une horloge identique restée sur Terre. Négligez la rotation de la Terre sur elle-même. Faites les approximations mathématiques nécessaires, étant donné que la vitesse de la navette est petite en comparaison de  $c$  (p. ex. développement du binôme). Note : le retard relatif est défini comme le changement de période divisé par la période ( $\Delta T/T$ ).

**B** L'effet Doppler gravitationnel fait qu'un photon qui s'élève voit sa fréquence diminuer. Le changement relatif de fréquence est  $\Delta f/f = gh/c^2$ . Cet effet va dans le sens inverse de celui calculé en (b) ; selon vous, est-il plus important, moins important ou d'égale importance ? Autrement dit, laquelle des deux horloges aura effectivement pris du retard quand on les ramènera côte à côte pour comparaison ? Justifiez votre opinion quantitativement (vous pouvez négliger la variation de  $g$  entre le sol et l'altitude de la navette).

### Problème 10.11

Une particule de masse  $m$  et de vitesse  $u$  entre en collision avec une autre particule de masse  $m$ , mais au repos. Quelle est la vitesse  $V$  du référentiel du centre d'impulsion, en fonction de  $u$  ?

**Problème 10.12**

**A** Démontrez qu'il est impossible à un électron libre d'émettre un photon, i.e., démontrez que l'énergie et l'impulsion ne peuvent être simultanément conservées lors de ce processus. Pour faciliter les choses, placez-vous dans le référentiel de l'électron avant l'émission du photon.

**B** Pourquoi alors un électron dans un atome peut-il émettre un photon ?

**Problème 10.13**

**A** Montrez que lorsqu'une particule possède une énergie  $E$  beaucoup plus grande que son énergie de repos  $mc^2$ , sa vitesse  $v$  et sa rapidité  $\eta$  sont approximativement données par

$$v/c \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 \quad \eta \approx \ln \left( \frac{2E}{mc^2} \right)$$

**B** Calculez la vitesse et la rapidité des particules suivantes : (i) un électron de 50 GeV et (ii) un proton de 1 TeV (ces énergies sont typiques des accélérateurs de particules des années 1990).

**Problème 10.14**

Un photon d'énergie  $E_0$  entre en collision élastique avec une particule de masse  $m$  au repos. Après la collision, le photon est dévié à un angle  $\theta$  par rapport à sa direction initiale. Quelle est l'énergie  $E$  du photon après la collision ? Quelle est la différence  $\lambda - \lambda_0$  entre la longueur d'onde du photon après la collision et sa longueur d'onde avant la collision. Cette différence a été mesurée pour la première fois par Compton en 1923.

**Problème 10.15**

Un photon d'énergie  $\epsilon$  est incident sur un noyau atomique de masse  $m$ , au repos dans le référentiel  $S$  du laboratoire.

**A** Quelle est la vitesse  $V$  par rapport à  $S$  du référentiel du centre d'impulsion de ce système ?

**B** Quelle est l'énergie interne de ce système ? Quelle est l'énergie disponible pour porter le noyau à un état de plus haute énergie, en supposant que le photon est complètement absorbé par le noyau ?

**Problème 10.16**

Un pion de masse  $m_\pi = 139,57$  MeV est stoppé dans la matière et se désintègre en un muon de masse  $m_\mu = 105,66$  MeV et un neutrino sans masse :

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$$

**A** En supposant que le pion est exactement au repos lors de sa désintégration, montrez que l'énergie



cinétique du muon produit est

$$K = \frac{1}{2} \frac{(m_\pi - m_\mu)^2}{m_\pi} c^2$$

**B** Calculez la vitesse du muon, en unités de  $c$  (une valeur numérique est requise).

**Problème 10.17**

La particule  $\pi_0$  (pion neutre) peut se désintégrer en deux photons, qui partent dans des directions opposées et se partagent toute l'énergie de la particule (y compris son énergie de masse  $mc^2$ ). Supposons que les deux photons en question sont détectés le long de l'axe des  $x$ , l'un vers l'avant et l'autre vers l'arrière. Supposons de plus que l'énergie du photon détecté vers l'avant est exactement deux fois plus grande que celle du photon détecté vers l'arrière. Quelle était alors la vitesse  $v$  du pion qui s'est désintégré?



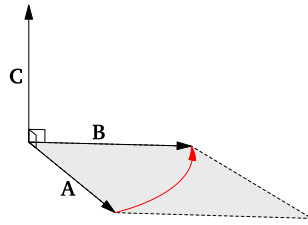
# CHAPITRE 11

## ANNEXES

### A Produit vectoriel et produit triple

#### 11.A.1 Produit vectoriel

Le *produit vectoriel* est une opération sur deux vecteurs qui en donne un troisième, définie en trois dimensions. Sa définition géométrique est la suivante : le produit vectoriel des vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , noté  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ , est un vecteur perpendiculaire à la fois à  $\mathbf{A}$  et à  $\mathbf{B}$ , dont la grandeur est



$$|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \angle(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (11.1)$$

et dont l'orientation est obtenue par la règle de la main droite : en disposant les trois premiers doigts de la main droite (pouce, index et majeur) pour former trois directions perpendiculaires, alors  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$  correspondent (en direction) respectivement au pouce, à l'index et au majeur. La règle, équivalente, du tire-bouchon, s'exprime ainsi : si on amène  $\mathbf{A}$  vers  $\mathbf{B}$  par le chemin le plus court, et qu'on s'imagine visser une vis ou une ampoule dans le même sens, le sens où s'enfonce la vis ou l'ampoule est celui de  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ . D'autre part, la grandeur  $|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}|$  est égale à l'aire du parallélogramme délimité par les deux vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , tel qu'illustré sur la figure. L'aire du triangle délimité par ces deux vecteurs est la moitié de celle du parallélogramme, soit  $\frac{1}{2}|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}|$ .

Les propriétés du produit vectoriel, démontrables par géométrie élémentaire de l'espace ou découlant directement de sa définition, sont les suivantes :

- Antisymétrie :  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$
- Distributivité :  $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$
- $(\lambda \mathbf{A}) \wedge \mathbf{B} = \mathbf{A} \wedge (\lambda \mathbf{B}) = \lambda \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ .

Une conséquence de l'antisymétrie du produit vectoriel est que  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = 0$ , ce qui découle aussi directement de la définition géométrique du produit vectoriel. D'autre part, si  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = 0$ , alors ces deux vecteurs sont nécessairement colinéaires, c'est-à-dire que  $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{A}$  ( $\lambda$  est un nombre réel).

Remarquons que les produits vectoriels des vecteurs de base orthonormés sont particulièrement simples :

$$\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (11.2)$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  s'exprime aisément en fonction de leurs composantes, en utilisant la distributivité du produit vectoriel :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \wedge (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= A_x B_x \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_x + A_x B_y \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y + \cdots + A_z B_z \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_z \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (11.3)$$

Ce résultat peut se mettre sous la forme d'un déterminant formel : <sup>1</sup>

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}\quad (11.4)$$

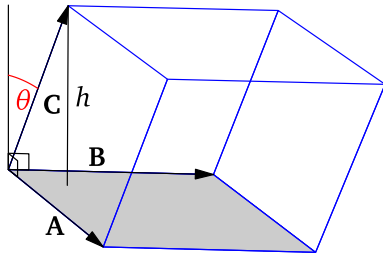
L'avantage de la formulation algébrique (11.4) du produit vectoriel est qu'elle permet de construire explicitement un vecteur perpendiculaire à deux vecteurs donnés et de calculer l'aire du parallélogramme délimité par ces deux vecteurs, sans recours direct à la géométrie.

On démontre facilement que le *double produit vectoriel* peut s'exprimer en fonction du produit scalaire et de la multiplication par un scalaire :

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\quad (11.5)$$

## 11.A.2 Produit triple

On définit aussi le *produit triple* (ou *produit mixte*) de trois vecteurs comme  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$ . En combinant les formules (2.19) et (11.4), on voit que le produit triple peut s'exprimer sous la forme d'un déterminant (véritable, cette fois) :

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}\quad (11.6)$$


Il est alors manifeste que le produit triple s'annule si deux des trois vecteurs sont colinéaires ou, plus généralement, si les trois vecteurs sont coplanaires (c'est-à-dire si l'un des trois peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres). Le produit triple est manifestement linéaire dans chacun de ses arguments. D'autre part, comme la permutation cyclique des rangées d'un déterminant n'en change pas la valeur, la même permutation cyclique de ses facteurs n'affecte pas le produit triple :

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})\quad (11.7)$$

L'interprétation géométrique du produit triple est qu'il représente le *volume orienté* du parallélépipède dont les trois arêtes sont les vecteurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$ . Le volume orienté est identique au volume géométrique, sauf qu'il possède un signe (+ ou -) selon l'ordre des trois vecteurs qui le délimitent. Dans le cas illustré, le volume orienté est positif, mais il serait négatif si deux des vecteurs en cause étaient échangés. Cette interprétation géométrique découle immédiatement de celle du produit vectoriel et du produit scalaire : le volume est ici donné par l'aire du parallélogramme formé par deux des trois vecteurs, fois la hauteur  $h$  du parallélépipède,

1. On dit que ce déterminant est *formel*, parce que ce n'est pas un véritable déterminant (les déterminants sont des nombres, pas des vecteurs), mais que la manière de le calculer est la même.

qui est égale à la longueur du troisième vecteur fois le cosinus de l'angle entre ce vecteur et l'axe perpendiculaire aux deux autres. Ainsi, le volume géométrique du parallélépipède est

$$V = |\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}|h = |\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}||\mathbf{C}|\cos\theta = |\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})| = |\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})| \quad (11.8)$$

## Problèmes

### Problème 11.1

**A** À partir de la définition géométrique du produit vectoriel, démontrez-en la distributivité :  $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$ , dans le cas où  $\mathbf{A}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  et à  $\mathbf{C}$ .

**B** Généralisez la preuve de (b) au cas de trois vecteurs  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  quelconques.

### Problème 11.2

Soit les vecteurs suivants :

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \quad \mathbf{B} = \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \quad \mathbf{C} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z$$

**A** Calculez la grandeur de ces trois vecteurs et les angles  $\angle \mathbf{AB}$ ,  $\angle \mathbf{AC}$  et  $\angle \mathbf{BC}$ .

**B** Les vecteurs  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  peuvent-ils former une base dans  $\mathbb{R}^3$ ?

**C** Calculez les vecteurs suivants :

$$\mathbf{A}^* = \frac{\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}}{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})} \quad \mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{C} \wedge \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})} \quad \mathbf{C}^* = \frac{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})}$$

Quels sont les produits scalaires de ces vecteurs avec  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$ ?

**D** Quel est le volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ ? Quelles sont les aires des faces de ce parallélépipède?

**E** Vérifiez explicitement la relation

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

avec les vecteurs donnés ci-haut.

### Problème 11.3

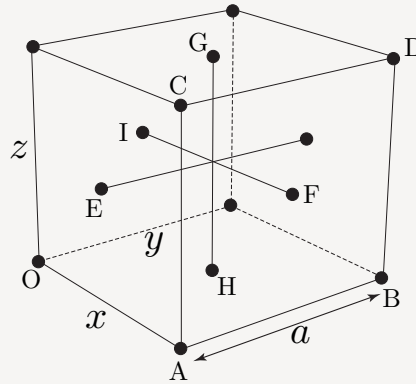
Expliquer en quoi les quatre expressions vectorielles suivantes sont syntaxiquement fausses, c'est-à-dire vides de sens :

$$\text{a) } \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} \quad \text{b) } A_x = 3\mathbf{e}_x \quad \text{c) } \mathbf{A} + |\mathbf{B}| \quad \text{d) } \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}$$

**Problème 11.4**

Plusieurs éléments, à l'état solide, ont une structure cristalline qu'on qualifie de *cubique à faces centrées* (cfc) et qu'on illustre ici. Chaque point (•) représente un atome. Les atomes sont situés aux sommets du cube ainsi qu'au centre de chaque face. Ce patron se répète de manière périodique dans les trois directions, de sorte qu'un atome situé à un sommet est en fait un sommet de 8 cubes contigus, et qu'un atome situé sur une face appartient à deux cubes contigus (un seul cube est illustré ici). Parmi les 8 sommets et 6 centres, certains ont été désignés ci-contre par une lettre (A–I et O). On adoptera comme origine le point O et on utilisera les trois axes cartésiens  $x, y, z$  indiqués. On supposera que la longueur de l'arête du cube est  $a$ . Cet objet géométrique nous servira de terrain de jeu dans ce qui suit, pour appliquer l'algèbre des vecteurs.

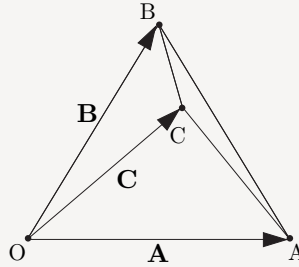
- A** Exprimez, en fonction des vecteurs unité  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , les vecteurs positions des cinq points suivants : B, D, E, F, G.
- B** Calculez l'angle  $\theta$  entre les segments OB et OD, en utilisant les propriétés du produit scalaire.
- C** Calculez l'aire du triangle OCD en utilisant les propriétés du produit vectoriel.
- D** Démontrez que les trois vecteurs  $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OE}, \mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OH}$  et  $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OI}$  forment une base dans  $\mathbb{R}^3$  et exprimez en fonction de ces vecteurs de base la position des points A, F, et D.
- E** Considérez les deux plans OBC et OBD. Calculez l'angle entre ces deux plans en calculant l'angle entre deux vecteurs perpendiculaires à chacun des deux plans, eux-mêmes construits par produit vectoriel.

**Problème 11.5**

Considérons un tétraèdre, c'est-à-dire un polyèdre régulier dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux identiques, d'arête  $a$ . Plaçons l'un des sommets à l'origine. Orientons l'une des arêtes (OA) le long de l'axe des  $x$  et une autre arête (OB) dans le plan  $xy$ . Utilisons la notation  $\mathbf{A} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{B} = \overrightarrow{OB}$  et  $\mathbf{C} = \overrightarrow{OC}$ .

- A** Exprimez les vecteurs  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  en composantes cartésiennes. Utilisez le fait que l'angle entre chacun de ces vecteurs est de  $60^\circ$  et qu'ils ont tous une longueur  $a$ . Les formules (1.42) et (1.44) des notes peuvent être utiles.
- B** Calculez l'aire de chacune des faces à l'aide du produit vectoriel.
- C** Calculez le volume du tétraèdre (vous devez vous rappeler la formule donnant le volume d'un prisme en fonction de sa base et de sa hauteur). Comment ce volume est-il relié au produit triple des vecteurs?

**D** Calculez l'angle entre deux faces du tétraèdre (c'est-à-dire l'angle entre deux vecteurs respectivement perpendiculaires à ces deux faces).

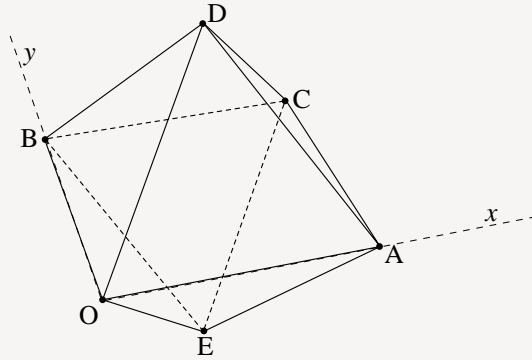


### Problème 11.6

Considérons un octaèdre : un polyèdre régulier à 8 faces et 6 sommets. Les six sommets sont désignés par les lettres A à E et O. Toutes les faces sont des triangles équilatéraux identiques. Le polygone OACB est un carré. On place l'origine à O et on oriente les axes  $x$  et  $y$  le long des segments OA et OB, comme illustré. Supposons que la longueur d'un côté de l'octaèdre est une constante  $a$ . Les vecteurs position des différents sommets seront désignés par les symboles  $\vec{A}$  à  $\vec{E}$  (autrement dit, on note  $\vec{A} = \vec{OA}$ , etc.)

- A** Exprimez les vecteurs  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  en fonction des vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ .
- B** Les 3 vecteurs  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{D}$  forment une base dans  $\mathbb{R}^3$ . Démontrez ce fait et exprimez le vecteur  $\vec{E}$  comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs de base.
- C** Calculez la distance entre les points D et E.
- D** Calculez l'aire de l'une des faces de l'octaèdre, ainsi que la surface totale de l'octaèdre, en utilisant le produit vectoriel.
- E** Calculez l'angle entre le triangle ODB et le plan  $xy$ , ainsi que l'angle entre le segment OD et le plan  $xy$ .
- F** Calculez le volume de l'octaèdre en vous aidant du produit triple.
- G** Supposons maintenant que l'octaèdre soit déformé par une contraction uniforme des longueurs par un facteur  $\alpha < 1$  dans la direction  $z$  (c'est-à-dire le long du segment ED). Autrement dit, après contraction, l'octaèdre n'est plus régulier : il est aplati. Quels sont alors (i) le nouveau volume et (ii) la nouvelle surface

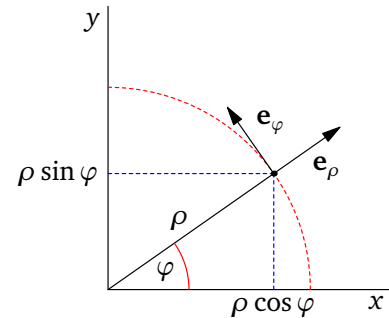
totale de l'octaèdre?



## B Coordonnées curvilignes et repères locaux

Lorsqu'on utilise un système de coordonnées curvilignes (par exemple cylindriques, ou polaires), on définit souvent un repère de vecteurs unitaires qui varie d'un point à un autre. En effet, la plupart des vecteurs utilisés en physique (ex. la vitesse, l'accélération, la force, le champ électrique, etc.) sont définis par rapport à un point donné de l'espace et non par rapport à l'origine (l'exception notable est le vecteur position). Il est donc possible de décrire ces vecteurs dans une base qui dépend du point considéré. Plus précisément, on parle ici d'une base orthonormée  $\{\mathbf{e}_1(\mathbf{r}), \mathbf{e}_2(\mathbf{r}), \mathbf{e}_3(\mathbf{r})\}$  dont chaque vecteur est une fonction de la position et non une constante comme dans un repère cartésien.

**FIGURE 11.1**  
Repère local en coordonnées cylindriques.



### 11.B.1 Coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées *cylindriques* est défini de la manière suivante par rapport au système cartésien :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \tag{11.9}$$

Les coordonnées *polaires planes* ne sont que la restriction au plan  $xy$  des coordonnées cylindriques. La signification géométrique des coordonnées  $\rho$  et  $\varphi$  est indiquée sur la figure (11.1). Notons que l'angle  $\varphi$  est



positif tel qu'indiqué, mais n'est défini que modulo  $2\pi$  (à moins d'avis contraire, tous les angles sont indiqués en radians). La variation de l'angle  $\varphi$  est positive si le segment OP décrit un mouvement antihoraire (vu de haut) et négative dans le cas contraire.

En coordonnées cylindriques, on associe à chaque point  $(\rho, \varphi, z)$  de l'espace trois vecteurs orthonormés  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  et  $\mathbf{e}_z$  qui sont respectivement perpendiculaires aux surfaces à  $\rho$  constant,  $\varphi$  constant et  $z$  constant. Ces vecteurs unité pointent dans la direction où la coordonnée respective augmente. La relation entre ces vecteurs unité et la base cartésienne est la suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi\end{aligned}\quad (11.10)$$

( $\mathbf{e}_z$  est bien sûr le même dans les deux systèmes).

Le vecteur position  $\mathbf{r}$  s'exprime comme

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z \quad (11.11)$$

où le vecteur  $\mathbf{e}_\rho$  est celui basé au point  $\mathbf{r}$ . Notons l'exception que constitue le vecteur position en ce qui regarde les bases locales : le point  $(\rho, \varphi, z)$  constitue le point d'arrivée du vecteur position, alors que pour d'autres vecteurs, comme la vitesse d'une particule ou son accélération, le point  $(\rho, \varphi, z)$  est le point d'attache (ou de départ) de ces vecteurs, parce qu'il représente la position de la particule.

### Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

Considérons maintenant un mouvement  $\mathbf{r}(t)$ , mais exprimé cette fois en fonction du repère local en coordonnées cylindriques. La position s'exprime alors comme  $\mathbf{r}(t) = \rho(t)\mathbf{e}_\rho + z(t)\mathbf{e}_z$ . Supposons pour simplifier les choses que  $z(t) = 0$ , c.-à-d. que le mouvement se déroule entièrement sur le plan  $xy$ . La subtilité ici est que le vecteur unité  $\mathbf{e}_\rho$  dépend de la position et est évalué à  $\mathbf{r}$ ; par conséquent il dépend du temps parce que la position dépend du temps. On doit donc prendre sa dérivée en calculant la vitesse :

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\rho \mathbf{e}_\rho) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \quad (11.12)$$

Calculons  $d\mathbf{e}_\rho/dt$ , de manière analytique. On sait que  $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi$  et que  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  sont constants. Le calcul est donc simple :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} &= (-\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi) \dot{\varphi} \\ &= \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\quad (11.13)$$

On peut donc écrire

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (11.14)$$

On calcule de même que

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} &= \frac{d}{dt}(-\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi) \\ &= -(\mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi) \dot{\varphi} \\ &= -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho\end{aligned}\quad (11.15)$$

Ceci permet d'exprimer l'accélération dans le repère cylindrique :

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi) \\ &= \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} \\ &= [\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2] \mathbf{e}_\rho + [\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}] \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\quad (11.16)$$

Cette accélération se décompose donc en composantes radiale ( $\propto \mathbf{e}_\rho$ ) et azimutale ( $\propto \mathbf{e}_\varphi$ ). Attardons-nous sur chacun des quatre termes de cette expression :

1.  $\ddot{\rho}\mathbf{e}_\rho$  est l'accélération radiale provenant du changement dans le temps de la vitesse radiale.
2.  $-\rho\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_\rho$  est l'accélération centripète. Dans le cas d'une particule en mouvement circulaire uniforme, la coordonnée  $\rho$  est constante et la coordonnée  $\varphi$  augmente linéairement avec le temps  $\varphi(t) = \omega t$ . Donc  $\dot{\rho} = 0$  et  $\dot{\varphi} = \omega$  et on retrouve la relation  $\mathbf{a} = -\rho\omega^2\mathbf{e}_\rho$  pour l'accélération centripète.
3.  $\rho\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$  est la contribution à l'accélération provenant de la variation dans le temps de la vitesse angulaire.
4.  $2\dot{\rho}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$  est l'accélération de Coriolis, attribuable à la variation de  $\rho$  lorsque la vitesse angulaire  $\dot{\varphi}$  est non nulle.

## 11.B.2 Coordonnées sphériques

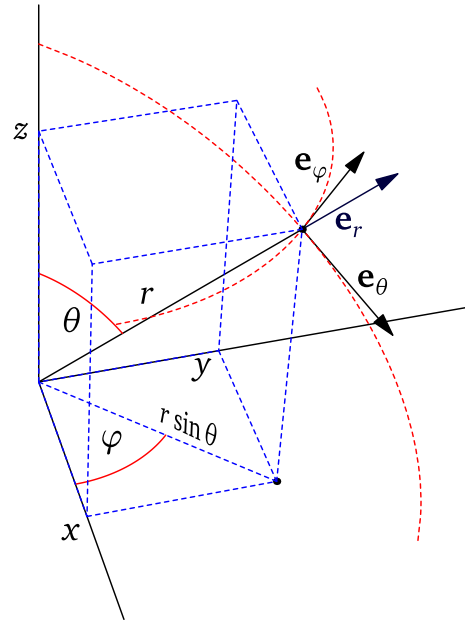
Le système de coordonnées *sphériques* est défini de la manière suivante par rapport au système cartésien :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (11.17)$$

La signification géométrique de ces coordonnées est indiquée sur la figure (11.2). L'angle  $\theta$  varie entre 0 et  $\pi$ , alors que l'angle  $\varphi$  est défini modulo  $2\pi$ , comme en coordonnées cylindriques. On appelle  $\theta$  l'angle *polaire* et  $\varphi$  l'angle *azimutal*. On remarque tout de suite que

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (11.18)$$

**FIGURE 11.2**  
Repère local en coordonnées sphériques.



En coordonnées sphériques, on définit ici trois vecteurs unité  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  et  $\mathbf{e}_\varphi$ . Le vecteur  $\mathbf{e}_\varphi$  est identique à celui qui est défini en coordonnées cylindriques, mais les vecteurs  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\theta$  sont en rotation d'un angle  $\theta$  par rapport aux vecteurs  $\mathbf{e}_\rho$  et  $\mathbf{e}_z$  des coordonnées cylindriques, de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_z \cos \theta + \mathbf{e}_\rho \sin \theta \\ \mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_z \sin \theta + \mathbf{e}_\rho \cos \theta \end{aligned} \quad (11.19)$$

En substituant l'expression de  $\mathbf{e}_\rho$  en fonction de  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$ , on arrive à l'expression suivante de la base locale en coordonnées sphériques, en fonction de la base cartésienne :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \theta \\ \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{e}_z \sin \theta \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi\end{aligned}\quad (11.20)$$

Rappelons encore que ces vecteurs pointent dans la direction où la coordonnée correspondante augmente. Comme les deux bases  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  et  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$  sont orthonormées, la relation inverse de (11.20) s'obtient en transposant la matrice formée par les coefficients apparaissant dans (11.20) :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\theta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_y &= \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z &= \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta\end{aligned}\quad (11.21)$$

Dans ce repère sphérique, le vecteur position  $\mathbf{r}$  s'exprime comme

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (11.22)$$

où, encore une fois, le vecteur  $\mathbf{e}_r$  est celui basé au point  $\mathbf{r}$ .

## C Notion de gradient

Considérons une fonction différentiable  $f(x, y, z)$  définie dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . On définit le *gradient* de cette fonction, qu'on écrit  $\nabla f$ , comme le vecteur formé par les dérivées partielles de cette fonction :

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (11.23)$$

On emploie aussi la notation suivante pour le gradient :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f \equiv \nabla f \quad (11.24)$$

La différentielle  $df$  de la fonction  $f$  s'exprime comme suit en fonction du gradient :

$$df(\mathbf{r}) = \nabla f \cdot d\mathbf{r} \quad (11.25)$$

Pour démontrer cette relation, un calcul explicite est effectué :

$$\begin{aligned}df &= f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) \\ &= f(x, y + dy, z + dz) + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} dx - f(x, y, z) \\ &= f(x, y, z + dz) + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} dx + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y} dy - f(x, y, z) \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} dx + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y} dy + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z} dz \\ &= \nabla f \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}\quad (11.26)$$

Dans ce calcul, nous avons évalué les dérivées partielles au point  $\mathbf{r}$ , commettant ainsi une erreur du deuxième ordre.

On définit la *dérivée directionnelle* de  $f$  comme sa dérivée dans une direction  $\mathbf{n}$  :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{n}) - f(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (11.27)$$

D'après l'expression (11.25) pour la différentielle, cette dérivée directionnelle n'est autre que  $\mathbf{n} \cdot \nabla f$ . On en conclut que la direction du gradient est celle dans laquelle la fonction augmente le plus rapidement. D'autre part, la dérivée directionnelle est nulle dans les directions perpendiculaires au gradient.

Pour donner une image plus précise de cette notion, restreignons-nous à une fonction  $f(x, y)$  sur le plan. On peut associer cette fonction à un relief dont l'altitude est donnée par  $z = f(x, y)$ . Ce relief peut être représenté graphiquement par des courbes de niveau, et le gradient est en tout point perpendiculaire aux courbes de niveau et pointe dans la direction où l'altitude augmente le plus rapidement.

#### Exemple 11.1

Soit la fonction  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . On calcule que

$$\nabla f(x, y) = 2(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = 2\rho\mathbf{e}_\rho \quad (11.28)$$

Les courbes de niveau sont des cercles centrés à l'origine.

L'expression (11.23) du gradient est valable en coordonnées cartésiennes seulement. On peut cependant traduire cette expression en coordonnées cylindriques :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (11.29)$$

ou en coordonnées sphériques :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (11.30)$$

## Problèmes

### Problème 11.7

**A** Considérez la fonction  $f(x, y) = xy$ . Donnez l'expression de son gradient  $\nabla f$  et illustrez graphiquement ce résultat en dessinant quelques courbes de niveau, ainsi que le vecteur gradient en une douzaine de points (nul besoin d'être précis ici : une idée générale de la direction et de la grandeur suffit).

**B** Calculez précisément le gradient trouvé en **A** partout sur le cercle de rayon  $\rho = 1$  et exprimez-le en fonction de l'angle azimutal  $\varphi$  et des vecteurs unité  $\mathbf{e}_\rho$  et  $\mathbf{e}_\varphi$  (coordonnées cylindriques). Indice : exprimez

$f(x, y)$  en fonction des coordonnées cylindriques et utilisez l'expression générale du gradient en coordonnées cylindriques.

## D Constantes physiques et astronomiques

Quantité	symbole	valeur (SI)
Vitesse de la lumière	$c$	299 792 458 m/s
Constante de Cavendish	$G$	$6.67390(8) \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg.s}^2$
accélération gravitationnelle standard	$g$	$9,80665 \text{ m/s}^2$
Constante de Coulomb	$k$	$8,987551788 \times 10^9 \text{ kg.m}^3/\text{C}^2.\text{s}^2$
Charge de l'électron	$e$	$1,602 177 3(5) \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e$	$9,109 390(5) \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p$	$1,672 623 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du Soleil	$M_{\odot}$	$1,98843 \times 10^{30} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	$R_{\odot}$	$6,9599 \times 10^8 \text{ m}$
Masse de la Terre	$M_{\oplus}$	$5,97223 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon de la Terre (équateur)	$R_{\oplus}$	$6,378164 \times 10^6 \text{ m}$
Rayon de la Terre (pôle)		$6,356 \times 10^6 \text{ m}$
Masse de la Lune		$7,349 \times 10^{22} \text{ kg}$
Rayon de l'orbite lunaire		$3,844 \times 10^8 \text{ m}$
Pression atmosphérique standard		$101 325 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$

## E L'alphabet grec

Minuscule	Majuscule	nom
$\alpha$	$A$	alpha
$\beta$	$B$	beta
$\gamma$	$\Gamma$	gamma
$\delta$	$\Delta$	delta
$\epsilon, \varepsilon$	$E$	epsilon
$\zeta$	$Z$	dzeta
$\iota$	$I$	iota
$\eta$	$H$	eta
$\theta, \vartheta$	$\Theta$	theta
$\kappa$	$K$	kappa
$\lambda$	$\Lambda$	lambda
$\mu$	$M$	mu
$\nu$	$N$	nu
$\xi$	$\Xi$	ksi
$o$	$O$	omicron
$\pi$	$\Pi$	pi
$\rho, \varrho$	$R$	rho
$\sigma$	$\Sigma$	sigma
$\tau$	$T$	tau
$\upsilon$	$\Upsilon$	upsilon
$\phi, \varphi$	$\Phi$	phi
$\chi$	$X$	chi (ki)
$\psi$	$\Psi$	psi
$\omega$	$\Omega$	omega